

Apellido y Nombres:

DNI:

1	2	3	4	Nota

Inscripto en: Sede:

Días:

Horario: Aula:

Corrector:

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

- Hallar analíticamente las coordenadas de todos los puntos de la recta $y = 3x + 1$ que están a distancia 1 del punto $(0,0)$
- Hallar los intervalos de positividad del polinomio
 $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ sabiendo que $x = 3$ es una raíz de P
- Si $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ y $g(x) = 3x + 2$ hallar $h = f \circ g$ y calcular $h^{-1}(4)$
- Sea $f(x) = 2 \cdot \sin(2x - \pi)$. Hallar todos los $x \in [-\pi, 2\pi]$ donde f alcanza su máximo valor

Problema 1:

Para resolver este problema vamos a usar la fórmula de distancia que vimos en el primer cuadernillo. Primero planteo la distancia entre el punto $(0,0)$ y uno de la recta $(x; y)$:

$$D = \sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (Y_p - Y_Q)^2} \xrightarrow{\text{reemplazo}} D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ahora le pedimos al punto $(x; y)$ que como pertenece a la recta verifique su ecuación, por lo tanto reemplazo "y" por " $3x+1$ ":

$$D = \sqrt{x^2 + (3x+1)^2}$$

Y por último, igualamos al valor de la distancia "1" y nos queda todo listo para despejar la "x":

$$1 = \sqrt{x^2 + (3x+1)^2} \xrightarrow{\text{paso la raíz}} 1^2 = x^2 + (3x+1)^2$$

$$1 = x^2 + 9x^2 + 6x + 1 \xrightarrow{\text{paso de lado}} 0 = 10x^2 + 6x$$



cuadrado del binomio:
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Nos quedó una ecuación cuadrática que resolvemos con la fórmula:

$$10x^2 + 6x = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 0}}{20} = \frac{-6 \pm 6}{20} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Por último, con estos dos valores de "x" debemos completar la información del punto, es decir busquemos el valor de "y" de la recta reemplazando en la ecuación:

$$x = 0 \rightarrow y = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \rightarrow (0; 1)$$

$$x = -\frac{3}{5} \rightarrow y = 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 1 = -\frac{4}{5} \rightarrow \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$$

Estos son los dos puntos de la recta que están a distancia 1.

Problema 2:

Este problema es similar a uno de la guía de polinomios, como tenemos un polinomio de grado 3 pero conocemos una raíz, usamos esta información para bajarle el grado usando la división por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 16 & -12 \\ 3 & & 3 & -12 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

↘ resto

Nos quedó como cociente un polinomio de grado dos (siempre es de grado uno menor que el polinomio original que se dividió), cuyos coeficientes son los indicados arriba, por lo tanto se trata del:

$$Q = 1x^2 - 4x + 4$$

Las raíces que aun no conocemos del polinomio P, son raíces también del polinomio Q, por lo tanto igualamos Q a cero, y sacamos sus raíces con la fórmula cuadrática:

$$1x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}$$

Es decir que este polinomio tiene dos veces como raíz al dos. El conjunto de raíces de P es $C^0 = \{3; 2\}$. Con estas raíces dividimos la recta real en tres intervalos y en cada uno nos fijamos el signo del polinomio P

$$(-\infty; 2) \quad P_{(x=0)} = -12 < 0$$

$$(2; 3) \quad P_{(x=2,5)} = -0,125 < 0$$

$$(3; +\infty) \quad P_{(x=4)} = 4 > 0$$

Por lo tanto el único intervalo donde P es positivo es $C^+ = (3, +\infty)$

Problema 3:

Primero encontremos la composición $h = f \circ g$ poniendo la función "g" dentro de la "f" como vimos en la práctica 3:

$$h = f(g) = \frac{1}{g} + 1 \xrightarrow{\text{reemplazo}} h = \frac{1}{3x+2} + 1$$

Y ahora nos piden que calculemos el valor de la inversa para $x = 4$. Debemos empezar por buscar la inversa con el procedimiento que vimos en la misma práctica 3:

- ponemos "y" en la función $y = \frac{1}{3x+2} + 1$

- intercambio "y" con "x" $x = \frac{1}{3y+2} + 1$

- despejamos "y":

$$x = \frac{1}{3y+2} + 1 \rightarrow x-1 = \frac{1}{3y+2} \rightarrow (x-1)(3y+2) = 1 \rightarrow 3y+2 = \frac{1}{x-1}$$

$$3y = \frac{1}{x-1} - 2 \xrightarrow{\text{terminamos}} y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - 2 \right)$$

Esta es la expresión de la función inversa. La escribimos así: $h^{-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - 2 \right)$

Nota 1: es probable que si no operaste exactamente como nosotros, la respuesta tenga distinta apariencia, pero igual sea correcta. Consultá con un docente o por lo menos si el siguiente resultado si te da lo mismo.

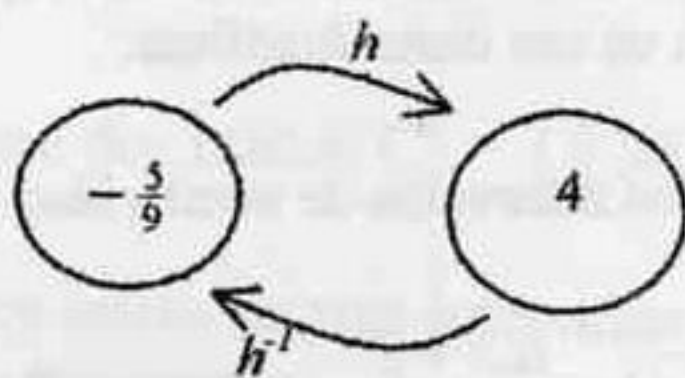
Para terminar calculamos el valor pedido: $h^{-1}(4) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4-1} - 2 \right) = -\frac{5}{9}$

Nota 2: para controlar que encontramos bien la respuesta podemos aprovechar el concepto de función inversa y demostrar la cuenta al revés, es decir ver si:

$$h\left(-\frac{5}{9}\right) = 4$$

con la función "h" que tenemos arriba:

$$h = \frac{1}{3\left(-\frac{5}{9}\right)+2} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{3}} + 1 = 4$$



Problema 4:

Tenemos un ejercicio de funciones trigonométricas, donde primero debemos razonar qué valor es el máximo de la función. La función "seno" toma valores entre -1 y 1, pero como esta función está multiplicada por un 2, oscila entre "-2" y "2". Por lo tanto debemos igualar la función a 2, que es su valor máximo y luego despejar la "x":

$$2 \cdot \text{sen}(2x - \pi) = 2 \rightarrow \text{sen}(2x - \pi) = 1$$

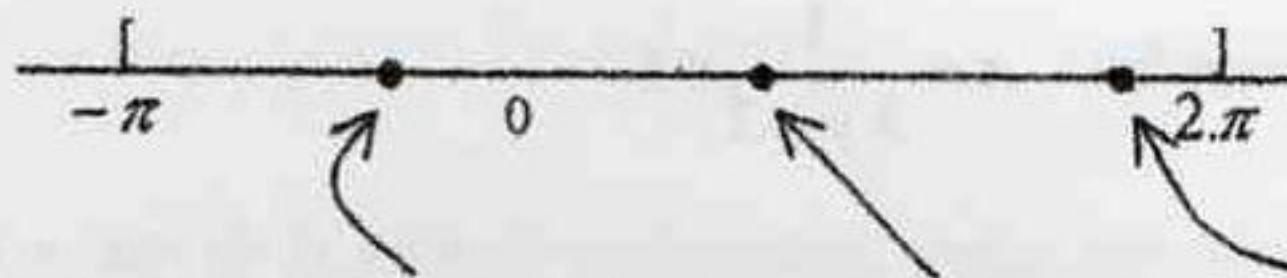
Ahora busquemos en la tabla: $\sin(\alpha) = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi$

Mientras que la "otra solución" (que con el seno se saca como " $\pi - \alpha$ ") da también $\frac{\pi}{2}$.

Completemos el despeje de la "x" volviendo a llamar $\alpha = 2.x - \pi$:

$$2.x - \pi = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi \rightarrow 2.x = \pi + \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi \rightarrow x = \frac{\frac{3}{2}\pi + 2.k.\pi}{2}$$

Nos queda buscar las soluciones de la familia que quedan dentro del intervalo. Le damos valores enteros a "k" reemplazando en la expresión que encontramos (acordate que para hacer las cuentas podemos trabajar con la calculadora operando sin los " π " y luego se lo agregamos al final)



$$x = \frac{\frac{3}{2}\pi + 2.k.\pi}{2} : \quad k = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{4}.\pi \quad ; \quad k = 0 \rightarrow x = \frac{3}{4}.\pi \quad ; \quad k = 1 \rightarrow x = \frac{7}{4}.\pi$$

Estas son las tres soluciones que entran en el intervalo: $x = -\frac{1}{4}.\pi$; $x = \frac{3}{4}.\pi$; $x = \frac{7}{4}.\pi$