

UNE INTRODUCTION AUX ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES

Hervé Lemonnier, DTP/SMTH, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble cedex 9
Tél. : 04 38 78 45 40, Fax : 04 38 78 50 36, Mél. : *herve.lemonnier@cea.fr*
<http://herve.lemonnier.sci.free.fr/TPF/TPF.htm>

Version du 20 décembre 2006

Avant-propos

L'ambition de ce cours est de fournir au lecteur les bases nécessaires à une approche raisonnée des écoulements diphasiques. Ces derniers interviennent dans de nombreux dispositifs industriels où l'on cherche à mettre en oeuvre un transfert d'énergie ou un transfert de masse.

Les écoulements diphasiques sont une discipline transversale. Ils procèdent de la mécanique des fluides à laquelle est liée la thermique ou parfois le transfert de matière. Dans la première situation, on nomme cette discipline la thermohydraulique (*thermal-hydraulics*). A l'origine, ces disciplines sont nées et ont été développées notamment pour le génie nucléaire et le génie chimique (*nuclear engineering*, *chemical engineering*). Leur développement n'est pas à ce jour aussi avancé que la mécanique des fluides traditionnelle et en particulier, l'utilisation des outils de mécanique des fluides numérique reste très largement encore du domaine de la recherche.

Pour décrire simplement l'état des connaissances, disons que l'on sait décrire, avec une précision suffisante pour les besoins pratiques, les écoulements et les transferts de chaleur en conduite et qu'une bonne partie des mécanismes contrôlant certains écoulements dispersés à bulles ou à gouttelettes sont suffisamment bien connus pour qu'il soit possible d'en déduire des modèles raisonnables. Pour donner une image simplifiée et faire un parallèle avec l'avancement de la mécanique des fluides, disons que les écoulements diphasiques en sont au stade de développement de l'hydraulique au début du siècle dernier.

Les raisons de cette progression très mesurée sont multiples. La très grande diversité des situations rencontrées disperse les efforts de recherche et surtout la caractérisation expérimentale des écoulements est très difficile. La panoplie de l'instrumentation monophasique est, à de très rares exceptions près, inefficace et l'accès aux grandeurs importantes comme la vitesse locale ou la température de chaque phase est très souvent impossible même au prix d'une intrusion importante dans l'écoulement.

La difficulté principale de la modélisation provient de l'existence d'interfaces séparant chaque phase. Pour décrire un écoulement diphasique, il faut donc d'une part modéliser le comportement de chaque phases et d'autre part déterminer le mouvement de chaque interface ce qui est une tâche considérablement compliquée. C'est pourquoi, des modèles moins détaillés, basés sur une approche moyennée dans le temps ou l'espace et souvent les deux, sont le seul recours de l'ingénieur et, ils le resteront probablement longtemps, malgré les progrès rapides des performances des ordinateurs.

La prise de moyenne fait disparaître du modèle moyenné les interfaces et comme lorsque l'on veut décrire les écoulements turbulents avec un modèle statistique, un *problème de fermeture* assez lourd et très souvent spécifique se pose. Dans le cadre du modèle dit à deux fluides où l'on décrit chaque phases par des champs de vitesse et de température différents, il faut décrire l'intensité du changement de phase ainsi que les échanges de quantité de mouvement et de chaleur à l'interface ce qui est un problème particulier aux écoulements diphasiques.

En raison des difficultés évoquées plus haut, il est très souvent nécessaire de recourir à

l'expérience pour caractériser des écoulements diphasiques et mettre à jour les mécanismes qui les contrôlent. Pour les caractériser, il est aussi souvent nécessaire de développer une instrumentation adaptée. C'est à ce prix que s'élaborent les modèles et pour qu'ils soient efficaces, il doivent s'appuyer de façon équilibrée sur la *modélisation*, l'*instrumentation* et les *techniques expérimentales*.

Le chapitre 1 décrit, d'un point de vue phénoménologique, les principales structures d'écoulements diphasiques rencontrés dans les conduites et les variables qui les contrôlent. Le chapitre 2 présente quelques techniques de mesure éprouvées. Le chapitre 3 est centré sur la modélisation. Il rappelle la technique d'élaboration des équations à partir des principes fondamentaux de la mécanique et de la thermodynamique en leur appliquant notamment différents opérateurs de moyenne. Bien que d'un point de vue pratique elles ne soient pas sans importance, les techniques numériques spécifiques aux écoulements diphasiques ne seront pas abordées ici. Toutefois, la diversité des situations physiques possèdent sa contrepartie dans la grande diversité des types d'équations obtenues. On sensibilisera le lecteur sur les conséquences des choix de relations de fermeture sur la nature des équations. Le chapitre 4 détaille ensuite quelques modèles utiles comme les modèles de pertes de pression en conduite. Enfin le chapitre 5 donne quelques éléments essentiels sur les transferts de chaleur en ébullition et en condensation.

Ce cours est destiné à des étudiants ou des ingénieurs possédant des notions de mécanique des milieux continus et de thermodynamique. Les outils mathématiques nécessaires à la compréhension du texte seront décrit au fil du texte. Des annexes proposeront quelques exemples documentés de problèmes accompagnés de leur corrigé.

L'auteur remercie Patrick Mathieu pour sa lecture critique du chapitre 3 et Eric Moncorgé pour sa lecture approfondie des chapitre 3 et des annexes correspondantes. Ce cours doit beaucoup à Jean-Marc Delhay, professeur à l'école Centrale Paris, dont les travaux ont très largement inspiré ces notes. L'auteur remercie également le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) qui a soutenu de nombreux travaux de recherche sur les écoulements diphasiques dont ce cours présente aussi quelques résultats.

St-Julien de Peyrolas, le 1^{er} août 2002.

Sommaire

Avant-propos	3
Sommaire	5
1 Description et occurrence des écoulements diphasiques	7
1.1 Les systèmes diphasiques dans l'industrie et la nature	7
1.2 Les paramètres descriptifs des écoulements diphasiques	13
1.3 Les types d'écoulements diphasiques	13
1.4 <i>Flooding</i> et <i>flow reversal</i>	13
2 La modélisation des écoulements diphasiques	15
3 Les équations des écoulements diphasiques	17
3.1 Introduction	17
3.2 Les équations locales et instantanées de la mécanique des fluides et de la thermique	17
3.3 Etablissement des équations locales et instantanées	23
3.4 Les équations locales et les relations de saut aux interfaces	27
3.5 Les équations instantanées moyennées sur la section d'une conduite	42
3.6 Les équations locales moyennées sur un intervalle de temps	45
3.7 Les équations moyennées en temps et en espace	50
4 Les modèles d'écoulements diphasiques	53
5 Les transferts de chaleur en ébullition et condensation	55
A Le théorème de Gauss et la règle de Leibniz	57
A.1 Flux et divergence	57
A.2 Théorème de Gauss	58
A.3 Règle de Leibniz	59
A.4 Forme limite du théorème de Gauss pour une section de conduite	63
A.5 Forme limite de la règle de Leibniz pour une section de conduite	65
A.6 Forme limite de la règle de Leibniz pour des fonctions continues par intervalles de temps	67
A.7 Forme limite du théorème de Gauss pour des fonctions continues par intervalles de temps	68
A.8 Commutativité des termes d'interaction à l'interface	70
A.9 Forme limite du théorème de Gauss pour le filtrage spatial	73
B Symétrie du tenseur des contraintes	75
B.1 Théorème de transport et bilan de masse	75
B.2 Théorème de transport et bilan de quantité de mouvement linéaire	76
B.3 Bilan de quantité de mouvement angulaire	76

C Propriétés thermodynamiques de l'eau à l'état saturant	79
C.1 Propriétés thermodynamiques	79
C.2 Propriétés physiques	87
D Prise en compte de la tension superficielle	95
D.1 Notion de tension de surface	95
D.2 Bilan de quantité de mouvement en présence de tension superficielle	98
D.3 Expression du gradient de surface et de la divergence de surface de la normale . .	99
D.4 Normale, gradient de surface et courbure d'une surface en représentation paramétrée cartésienne	101
D.5 Normale, gradient de surface et courbure d'une surface en représentation paramétrée cylindro-polaire	104
D.6 Applications	105
E Modèle d'écoulement dispersé à gouttelettes	109
E.1 Description d'un système industriel	109
E.2 Variables indépendantes du problème.	109
E.3 Bilans de masse	110
E.4 Bilans de quantité de mouvement	111
E.5 Simplification du bilan de quantité de mouvement	111
E.6 Etablissement du bilan de quantité du mélange	113
E.7 Bilans d'énergie totale phasique	114
E.8 Récapitulation des équations et analyse de la fermeture	115
E.9 Relations de fermeture	115
E.10 Relations d'état et propriétés des fluides	120
E.11 Forme finale des équations	123
E.12 Intégration numérique et conditions aux limites	124
E.13 Validation du modèle	126
E.14 Effets de la taille des gouttes, du changement de phase et de la modélisation de l'aire interfaciale	128
F Problèmes résolus	135
Fonctionnement d'un air-lift (énoncé 2001)	137
Fonctionnement d'un air-lift (corrigé 2001)	141
Etude du drainage de la mousse (énoncé 2002)	147
Etude du drainage de la mousse (corrigé 2002)	155
Dégazage du lac de Nyos (énoncé 2003)	165
Dégazage du lac de Nyos (corrigé 2003)	171
Stabilité de l'écoulement stratifié (énoncé 2004)	185
Stabilité de l'écoulement stratifié (corrigé 2004)	191
Thermosiphon diphasique (énoncé 2005)	205
Thermosiphon diphasique (corrigé 2005)	209
Fonctionnement d'un autocuiseur (énoncé 2006)	219
Fonctionnement d'un autocuiseur (corrigé 2006)	225
Nomenclature	243
Index	243
Références	245

Chapitre 1

Description et occurrence des écoulements diphasiques

1.1 Les systèmes diphasiques dans l'industrie et la nature

Les domaines industriels concernés par les écoulements diphasiques vont être brièvement présentés. Les motivations d'études sont assez différentes dans chaque branche et quelques éléments explicatifs seront alors apportés.

Il y a manifestement des domaines où l'on produit délibérément des écoulements diphasiques, comme le génie chimique, où pour les besoins du procédé deux phases sont mises en contact, un liquide et un gaz par exemple, pour produire une nouvelle espèce à leur interface commune. Bien que la notion thermodynamique de phase soit relative à l'un des trois états courants de la matière, solide, liquide ou gaz, on continue, par extension, à considérer les écoulements liquide-liquide, par exemple, comme diphasiques car leurs méthodes de description sont analogues à celles des écoulements diphasiques (Ishii, 1975, chap. 1). En énergétique, on produit dans une chaudière de la vapeur en portant à ébullition le liquide et l'écoulement diphasique est délibérément produit.

En revanche, la cavitation dans les turbomachines est subie. Dans les aubages, l'accélération du fluide dépressurise le liquide qui peut alors dans certaines conditions changer de phase. L'apparition de vapeur s'accompagne souvent d'une chute des performances et d'autres manifestations comme le bruit et l'érosion du matériau constituant de la machine.

Le transport pneumatique des poudres est un autre exemple d'écoulement diphasique qui, avec les exemples précédents, donnent une idée de la vaste diversité des situations rencontrées. La première situation met en oeuvre un écoulement d'un liquide et d'un gaz, la seconde, de deux liquides non miscibles, la troisième d'un liquide et de sa vapeur et finalement d'un gaz et d'un solide.

1.1.1 Le génie nucléaire

Les réacteurs nucléaires électrogènes sont classés historiquement en terme de *génération*. Ils sont basés sur le principe de la fission nucléaire d'éléments lourds comme certains isotopes de l'uranium et du plutonium par des neutrons. Les premiers réacteurs construits comme par exemple ceux de la filière française graphite naturel-graphite-gaz des années 60 correspondent à la première génération. Cette génération comprend les 9 premiers réacteurs construits en France.

Les réacteurs à eau sous pression construits aux Etats-Unis dans les années 70 puis en France à la suite du premier choc pétrolier font partie de la deuxième génération. Cette génération est représentée par la quasi totalité des réacteurs en fonctionnement aujourd'hui. La France possède 58 réacteurs en fonctionnement, dérivés de la technologie américaine de Westinghouse. Leur puissance est de 900, 1300 et 1450 MW.

Les projets de réacteurs à sûreté avancée comme EPR (*European pressurized reactor*) constituent la troisième génération. En tout logique industrielle, il devraient constituer la relève des réacteurs en activité aujourd'hui et dont le potentiel de fonctionnement s'échelonne de 2020 à 2030. En 2003, il existe deux projets construction en cours de négociation : un en France par EDF et une proposition faite par Framatome pour la construction d'un cinquième réacteur en Finlande. Ces réacteurs développés par Framatome et Siemens devraient être mis en oeuvre en France à partir de 2010-2015.

Enfin, les réacteurs du futur, dont les qualités essentielles sont la sûreté, l'efficacité économique, l'économie des ressources naturelles, la réduction des risques de prolifération et la minimisation des déchets sont conçus dans une perspective de développement durable. Une coopération internationale se met en place depuis 2001 pour étudier les concepts les plus prometteurs et en développer la technologie. Les deux initiatives les plus importantes sont "Generation IV" menée principalement par les Etats-Unis, Le Japon et la France représentée notamment par le CEA et "INPRO" dans les pays de l'ex-URSS. 6 concepts de réacteurs, intégrant également la problématique du cycle du combustible ont d'ores et déjà émergé. Ils fonctionnent généralement à très haute température, pour maximiser le rendement thermodynamique et utiliseraient des caloporteurs variés comme les métaux liquides (Pb, Na), des gaz (He, CO₂, eau, à l'état supercritique notamment pour les deux derniers) et possèdent des spectres neutroniques favorisant la consommation du combustible et minimisant la production de déchets de haute activité et à vie longue. L'horizon industriel de la quatrième génération est au plus tôt 2040.

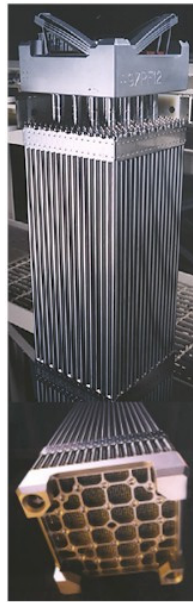
Les réacteurs à fusion comme ceux dont le projet mondial ITER a pour objectif d'étudier la faisabilité industrielle, s'inscrivent dans une perspective encore plus lointaine. Ils sont basés sur la réaction de fusion contrôlée d'isotopes lourds de l'hydrogène dont la mise en oeuvre technologique est considérablement plus complexe que la fission en raison des niveaux de température, 10⁶ à 10⁷ K, à produire et maîtriser.

Dans la seconde génération de réacteurs, il existe plusieurs types de réacteurs nucléaires refroidis à l'eau : les réacteurs bouillants et les réacteurs à eau sous pression (REP ou PWR, *pressurized water reactor*). En France, l'immense majorité des 58 réacteurs exploités par EDF en 2002 sont de type REP.

Dans ces réacteurs la matière nucléaire est confinée par plusieurs barrières imbriquées. Les pastilles des combustibles sont empilées à l'intérieur de crayons dont la gaine métallique est transparente aux neutrons et représente la première barrière de confinement. Les crayons sont regroupés en assemblages comme ceux que l'on peut observer à la figure 1.1(a). Les assemblages possèdent un diamètre de 10 mm environ et une hauteur chauffante typiquement de l'ordre de 4 mètres. L'eau du circuit primaire transporte la chaleur produite par la réaction de fission par convection forcée. L'ensemble des assemblages forme le coeur du réacteur dont le diamètre est de l'ordre de 4 mètres. Il est représenté au centre du réacteur en jaune à la figure 1.2. La puissance thermique produite par le coeur est de l'ordre de 3000 à 5000 MW selon le type de réacteur.

L'eau en contact avec le coeur est maintenue sous pression par l'action d'un pressuriseur représenté à la figure 1.2 sur la branche chaude du circuit primaire. Un gaz sous pression placé dans la partie supérieure de ce dispositif maintient une pression élevée de 155 bar environ dans tout le système par ailleurs étanche ce qui permet à l'eau de rester liquide à la température de sortie du coeur qui est de 320°C environ. A cette pression, les premières bulles de vapeur n'apparaissent qu'à 345°C environ (voir annexe C).

La chaleur produite par le coeur est transmise à l'extérieur au travers d'une échangeur



(a) Assemblage alliance



(b) Générateur de vapeur

Figure 1.1: Description d'un assemblage combustible Alliance, commercialisé par Framatome et vue de dessus du chignon du faisceau de tubes d'un générateur de vapeur.

tubulaire, le générateur de vapeur, représenté à la figure 1.2. Il est formé de plusieurs milliers de tubes en U inversés d'un diamètre typique de 5 cm. La zone de retournement des tubes du générateur de vapeur est appelée le chignon et est visible à la figure 1.1(b). La hauteur typique d'un générateur de vapeur est de 15 mètres environ. Le générateur de vapeur est la deuxième barrière de confinement de la radioactivité. Un réacteur possède 3 ou 4 générateurs selon son type et autant de boucles correspondantes. La circulation dans chaque boucle du circuit primaire est assurée par une pompe. Une seule boucle est représentée à la figure 1.2. Le débit nécessaire pour évacuer la puissance produite est de 10 t/s environ. Chaque conduite du circuit primaire possède un diamètre d'un mètre environ.

Le secondaire du générateur de vapeur constitue la source chaude de la machine thermodynamique produisant l'électricité. C'est le seul endroit du réacteur où l'écoulement est diphasique en régime nominal.

On distingue deux types de situations où les écoulements diphasiques sont présents : les situations nominales et relatives au *dimensionnement* du réacteur et les situations accidentelles relatives à la *sûreté* du réacteur. On différencie, de plus, les situations où la température du cœur reste limitée en deçà de la température de fusion des gaines contenant le combustible nucléaire, et celles entraînant la fusion partielle ou totale du cœur. Dans ce cas on parle d'accidents graves. Voici quelques exemples de ces situations.

Dimensionnement

- Le générateur de vapeur (GV) est un échangeur tubulaire dans lequel l'eau à vaporiser recircule. Son dimensionnement nécessite de connaître le coefficient d'échange de chaleur, les pertes de pression à travers le faisceau de tube et la fraction volumique de vapeur dans la partie basse du GV. Le GV est une pièce métallique très massive et un surdimensionnement injustifié est très pénalisant.

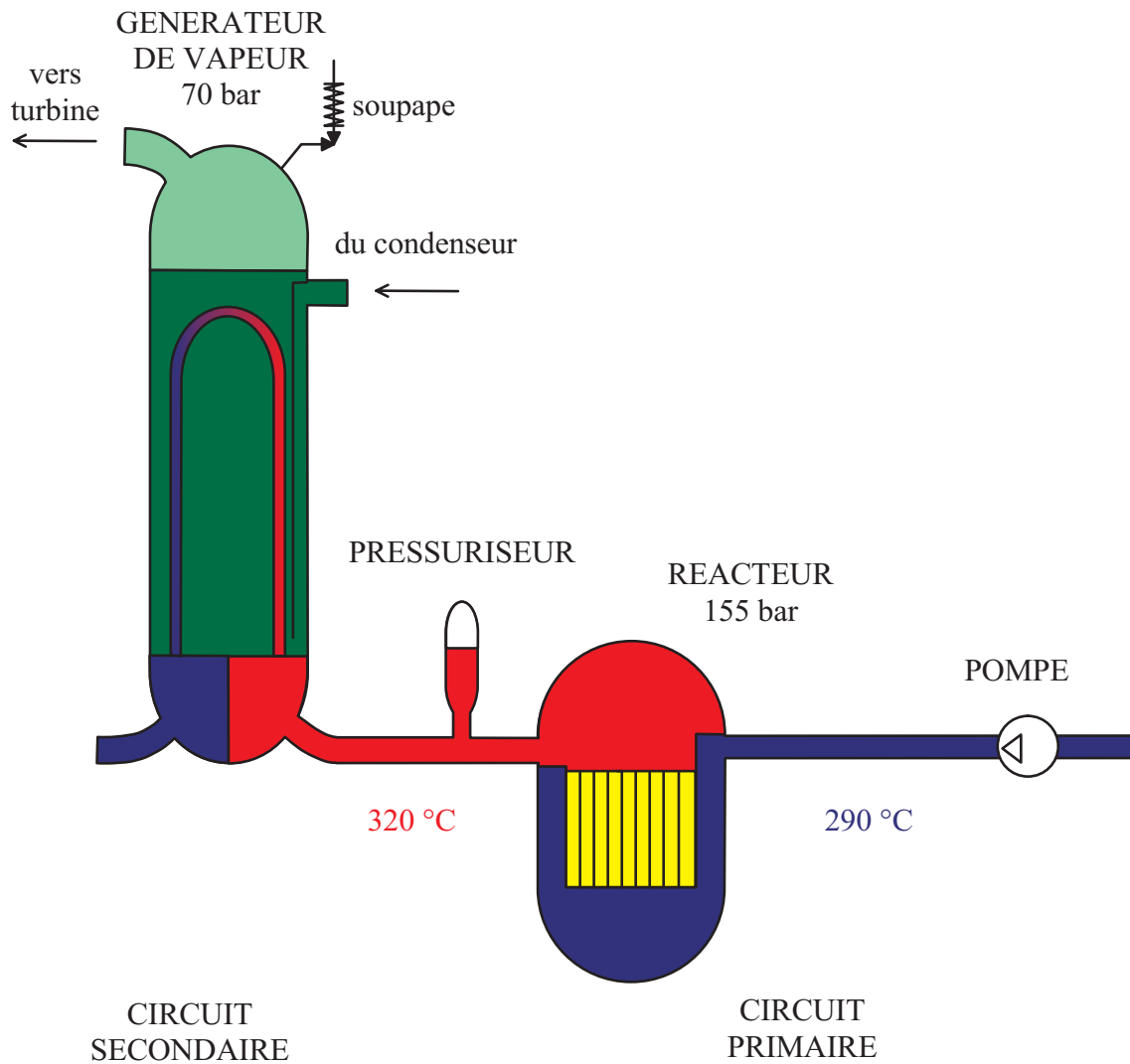


Figure 1.2: Représentation schématique d'un réacteur à eau sous pression. Le réacteur comprend le circuit primaire constitué de 3 ou 4 boucles. Chaque boucle, dont une seule est représentée ici, est constituée d'une pompe alimentant le cœur par la branche froide, une branche chaude connectant le cœur au primaire du générateur de vapeur et la branche froide, fermant la boucle, du générateur de vapeur vers l'aspiration de la pompe. Le pressuriseur, connecté à la branche chaude, maintient la pression de fonctionnement grâce à son ciel de gaz sous pression. Le secondaire du générateur de vapeur est alimenté en eau froide du condenseur et produit de la vapeur qui est dirigée vers la turbine.

- La pression nominale au secondaire d'un GV est de l'ordre de 70 bar environ. Un tube du générateur de vapeur pourrait en se rompant mettre en communication le primaire et le secondaire et le pressuriser au delà de ses limites intrinsèques. Il faut donc le munir d'une soupape de sécurité pour limiter cette pressurisation. Lors de l'ouverture de la soupape, le GV est dépressurisé et l'écoulement devient diphasique. Il est à grande vitesse, le mélange débité par la soupape est compressible et son débit est contrôlé par le phénomène de blocage sonique (écoulement critique). L'ouverture de la soupape engendre des ondes de pression qui se propagent dans la conduite de sortie, se réfléchissent sur ses extrémités et les singularités hydrauliques et en retour peuvent rendre instable le transitoire d'ouverture de la soupape. Ces instabilités peuvent engendrer la destruction du dispositif et doivent être prises en compte dans le dimensionnement.
- Le générateur de vapeur est le siège d'écoulements diphasiques pour lesquels la quantité de vapeur produite augmente avec la hauteur. Dans la partie supérieure, le chignon, l'écoulement est transversal et sollicite mécaniquement les tubes. Le dimensionnement

des tubes et des dispositifs anti vibrations qui limitent leurs déplacements nécessite de connaître la nature de ces excitations et les mécanismes associés.

Sûreté

L'autorisation d'exploiter un réacteur nucléaire est donnée par l'Autorité de Sûreté. L'exploitant, EDF en France, doit faire la preuve tous les dix ans que ses installations n'ont pas d'impact radiologique sur l'environnement et le personnel. On considère alors de nombreuses situations accidentelles entraînant successivement la défaillance des différentes barrières de confinement de la radioactivité. Il est impossible pour des raisons évidentes d'effectuer la vérification directe de la robustesse de la conception, notamment pour les accidents graves. Le seul recours est la modélisation qui doit en contrepartie faire la preuve de sa représentativité. Cette preuve repose en partie sur des programmes expérimentaux où des phénomènes particuliers sont étudiés et à partir desquels des modèles sont élaborés. Quelques uns de ces scénarios d'accident sont maintenant évoqués.

- **Perte de réfrigérant primaire** (*loss of coolant accident*, LOCA). On considère ici la rupture totale d'une des branches du circuit primaire. Le circuit se dépressurise en une trentaine de secondes environ et la chute de pression entraîne la vaporisation du caloporteur. Les écoulements deviennent alors diphasiques dans l'ensemble du réacteur. Les pompes ont été arrêtées, les vitesses d'écoulement dans le coeur chutent et les transferts de chaleur se dégradent. Il en résulte une augmentation rapide de la température des gaines du combustible. Les dispositifs de sauvegarde doivent apporter suffisamment d'eau pour compenser le débit perdu à la brèche et assurer le renoyage du coeur. Pour décrire ces accidents on utilise des *codes* de calcul comme CATHARE, développé au CEA (code avancé de thermohydraulique des réacteurs à eau) qui entre autres choses calcule la température maximale atteinte par la gaine du combustible et permet d'en déterminer l'intégrité.
- **Convection du corium dans la cuve.** Si le coeur se découvre, le coeur insuffisamment refroidi fond. En effet, lorsque la réaction nucléaire est arrêtée, les produits de fission continuent à se désintégrer en produisant une petite fraction de la puissance nominale. Le combustible, constitué d'oxydes réfractaires atteint une température de 3000 K, fond et entraîne également la fusion des internes en acier de la cuve. Ce mélange de matériaux en fusion s'appelle le *corium*. Pour confiner ce matériau radioactif dans la cuve, on peut la refroidir de l'extérieur en noyant le puits de cuve (figure 1.3(a)). La description de cette situation et notamment l'évaluation du risque de rupture de la cuve, nécessite de déterminer les flux de chaleur entre la cuve et l'eau, le corium et la cuve. L'enjeu principal consiste à déterminer correctement la canalisation du flux de chaleur par l'acier, conducteur, surnageant les oxydes réfractaires dans lesquels la puissance thermique est produite. Le phénomène de concentration des flux à l'interface acier-cuve est particulièrement déterminant pour prédire l'intégrité de la cuve.
- **Interaction corium eau.** Si la cuve se perce, le corium très chaud entre en contact avec l'eau du puits de cuve (voir figure 1.3(b)). Les phénomènes de mélange doivent être décrits avec précision. L'enjeu est de déterminer les conditions pour lesquelles le corium peut se fragmenter. La fragmentation du corium augmente très sensiblement la surface d'échange entre les deux milieux ce qui peut induire une grande production de vapeur. Cette production de vapeur s'accompagne d'un changement de volume considérable et d'ondes de pression pouvant contribuer à fragmenter davantage le corium. L'enjeu consiste à déterminer les conditions de propagation de ce phénomène à toute la masse présente ce qui a pour conséquence une pressurisation violente du bâtiment réacteur (explosion de vapeur). Ce phénomène permet de dimensionner cette enceinte qui est la dernière barrière de confinement de la radioactivité.
- **Interaction corium béton.** Dans certains concepts de réacteurs avancés, on place sous le réacteur un radier sacrificiel dont le rôle est de permettre l'étalement du corium (voir

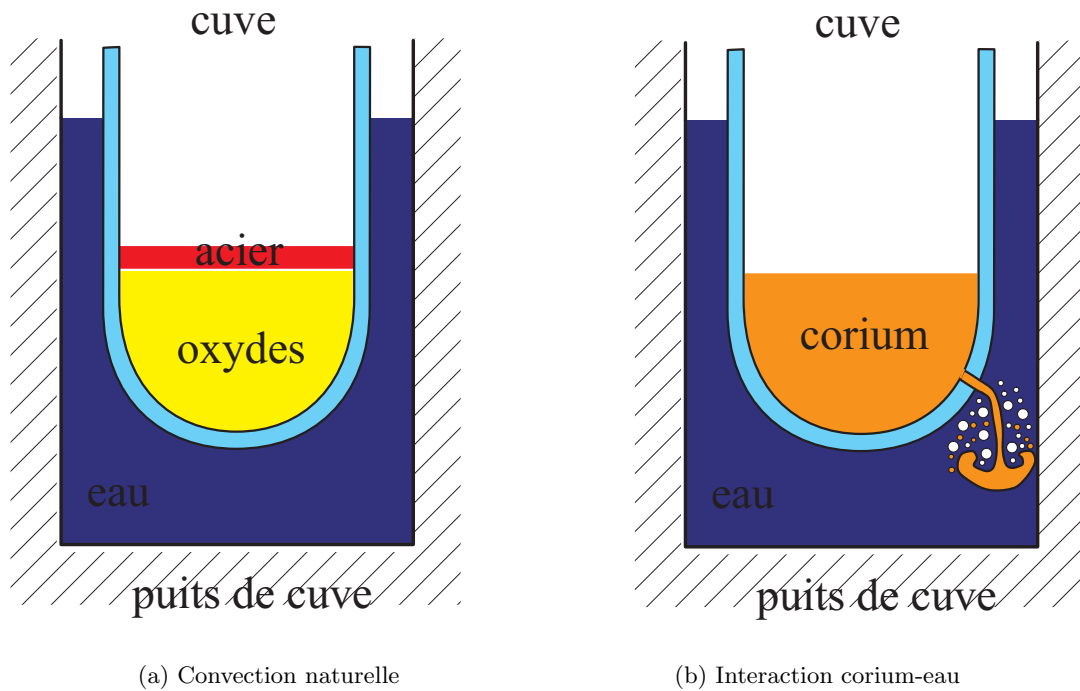


Figure 1.3: Illustration de deux situations d'accidents graves. (a) Convection naturelle du corium dans la cuve avec un risque de percement de cette dernière. (b) Interaction corium eau consécutive au percement de la cuve. Phase de prémélange initiant une possible détonation thermique.

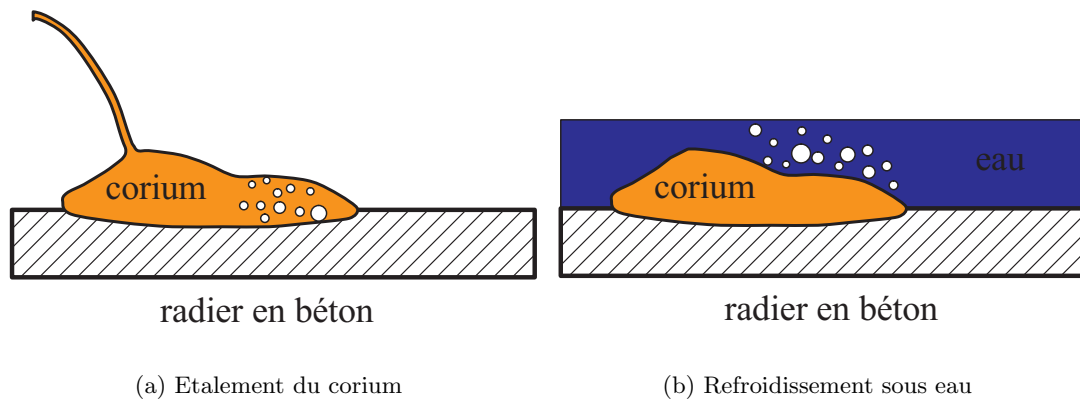


Figure 1.4: Illustration de deux situations d'accidents graves. (a) Étalement du corium sur le radier sacrificiel avec ablation du substrat. (b) Refroidissement du corium sous eau.

figure 1.4(a)). L'étalement permet d'augmenter la surface d'échange entre le corium et l'environnement et en conséquence permet de contrôler son refroidissement. Les oxydes réagissent avec le béton avec dégagement de gaz, c'est le phénomène d'ablation. L'étalement du mélange est contrarié par la formation de croûtes et modifié par la présence des gaz et contrôlé par les flux de chaleur échangés avec l'environnement. L'enjeu industriel est le dimensionnement du radier.

- **Refroidissement du corium sous eau.** Lorsque le corium est étalé, la question se pose de son refroidissement à long terme (voir figure 1.4(b)). Il s'agit de déterminer les flux de chaleurs échangés par le corium avec le radier et l'eau pour dimensionner le système de refroidissement et d'analyser les risques d'explosion thermique présentés par cette situation.

Décontamination des installations nucléaires

Le déclasserment des installations nucléaires ou certaines interventions de maintenance nécessite de débarrasser certains dispositifs des traces de radioactivité que leur utilisation a pu engendrer. Les composants à décontaminer peuvent être des cuves ayant contenu des effluents liquides ou des composants de centrale comme les générateurs de vapeur sur lesquels une opération de maintenance doit être effectuée. La décontamination consiste à faire circuler un produit fortement oxydant ou acide dans l'installation ou à remplir les volumes à nettoyer et à attendre qu'une épaisseur donnée des parois soit attaquée et dissoute avec tous les radio-nucléides qu'elles contiennent.

Le coût du retraitement des effluents liquides ainsi produits incite à minimiser la quantité produite parfois en raison de la toxicité chimique des produits employés. Une idée simple peut être d'utiliser une mousse produite à partir de la solution décapante plutôt que la solution elle-même (Pouvreau, 2002). L'aération naturelle de la mousse divise par un facteur 10 au moins le volume des effluents mis en oeuvre et ne semble pas contrarier l'action chimique de la mousse qui s'opère au voisinage immédiat de la paroi. La mise en oeuvre et l'optimisation d'une opération de décontamination par mousse nécessite de comprendre les mécanismes de transferts de masse dans la mousse et la dynamique du drainage.

1.1.2 Le génie pétrolier

1.1.3 Le génie chimique

1.1.4 L'automobile et l'aviation

1.1.5 Le spatial

1.1.6 La thermique industrielle

1.1.7 La météorologie

1.1.8 La vulcanologie

1.1.9 La nivologie

1.2 Les paramètres descriptifs des écoulements diphasiques

1.3 Les types d'écoulements diphasiques

1.3.1 Les régimes d'écoulement en conduite verticale ascendante

1.3.2 Les régimes d'écoulement en conduite horizontale ou faiblement inclinée

1.4 *Flooding* et *flow reversal*

1.4.1 Une application d'une corrélation de *flooding*

Chapitre 2

La modélisation des écoulements diphasiques

à venir

Chapitre 3

Les équations des écoulements diphasiques

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de rappeler les équations globales et locales de la mécanique des fluides et de les appliquer à un milieu comprenant deux phases comme par exemple un liquide et un gaz. Les interfaces qui les séparent seront considérées comme des surfaces de discontinuité et on montre qu'il faut alors non seulement satisfaire des équations aux dérivées partielles dans chacune des phases mais également satisfaire des relations de saut aux interfaces qui expriment l'équilibre mécanique et thermique des interfaces. Ces équations sont la base des méthodes de simulation numérique et permettent de décrire les phénomènes élémentaires comme la croissance d'une bulle ou l'écoulement d'un film liquide sur une paroi.

Les équations du modèle à deux fluides moyennées sur la section d'une conduite seront établies en moyennant les équations locales. Ces équations permettent de décrire les écoulements en conduite par une approche monodimensionnelle. Ce sont les équations utilisées par exemple par les codes d'analyse de sûreté des réacteurs nucléaires à eau sous pression.

Les équations locales moyennées sur un intervalle de temps seront ensuite établies. Ces équations permettent la description tridimensionnelle des écoulements diphasiques et sont utilisées par les logiciels commerciaux de CFD. On peut avec ces équations étudier notamment la distribution des phases dans un écoulement diphasique.

Les équations moyennées ne sont pas des équations fermées. Comme en écoulement monophasique turbulent, la prise de moyenne temporelle ou statistique aboutissant aux équations de Reynolds fait apparaître des quantités inconnues qu'il faut modéliser. Ces équations font de plus apparaître de nouvelles quantités comme le taux de vide ou l'aire interfaciale qui jouent un rôle fondamental dans la modélisation des écoulements diphasiques.

On trouvera un exposé détaillé de l'établissement des équations de bilan par exemple par Delhayé dans Delhayé *et al.* (1981), Bergles *et al.* (1981), par Delhayé et Bouré dans Hetsroni (1982) et par Ishii (1975). Ce chapitre reprend fidèlement ces travaux. Les outils mathématiques utilisés ici sont décrits par exemple par Aris (1962), Candel (1990) et dans une grande généralité par Coutris (1993).

3.2 Les équations locales et instantanées de la mécanique des fluides et de la thermique

Les équations locales de la mécanique des fluides sont obtenues en appliquant les principes fondamentaux notamment,

- la conservation de la masse,

- le principe fondamental de la dynamique
- et les deux principes de la thermodynamique,

à un volume matériel, c'est-à-dire à un système géométrique se déplaçant avec le fluide. Les équations locales en sont déduites en appliquant deux théorèmes mathématiques : le théorème de Gauss et la règle de Leibniz. Le théorème de transport de Reynolds est une forme particulière de cette dernière.

3.2.1 Les outils mathématiques

La règle de Leibniz fait intervenir la vitesse d'un point attaché à une surface et notamment sa composante normale que l'on appelle la *vitesse géométrique de déplacement* de la surface.

La vitesse géométrique d'une surface

Une surface S est définie par la données des coordonnées d'un point M la décrivant en fonction de deux paramètres, et du temps t si celle-ci n'est pas fixe,

$$S : \mathbf{M} = \mathbf{M}(u, v, t). \quad (3.1)$$

La vitesse d'un point attaché à la surface est par définition, sa vitesse à coordonnées fixées sur la surface,

$$\mathbf{v}_S \triangleq \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right)_{u,v}. \quad (3.2)$$

On peut par ailleurs définir la surface S par une équation implicite,

$$f(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.3)$$

Une normale à la surface S en un point M peut être calculée en différenciant (3.3),

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \quad (3.4)$$

qui montre qu'à t donné ($dt = 0$), le vecteur ∇f est orthogonal au plan tangent à S en M . On obtient un vecteur unitaire normal à S en M par,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad (3.5)$$

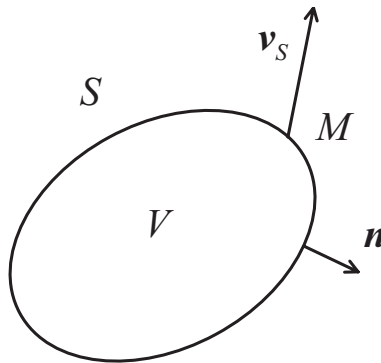


Figure 3.1: Description schématique d'un volume fluide, V , limité par une surface S . \mathbf{n} est la normale à la surface S orientée vers l'extérieur du volume V . \mathbf{v}_S est la vitesse d'un point attaché à la surface S . Si le volume est matériel $\mathbf{v}_S = \mathbf{v}$, la vitesse du fluide. En général $\mathbf{v}_S \neq \mathbf{v}$.

Pour analyser le déplacement d'un point M donné de S à l'instant t , il suffit de développer l'équation implicite de la surface (3.3) au premier ordre en temps et en espace. Le déplacement du point M , $d\mathbf{x}$ à l'instant dt est donné implicitement par,

$$f(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t + dt) = f(\mathbf{x}, t) + \nabla f \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \dots \quad (3.6)$$

Si le point est initialement sur S ($f(\mathbf{x}, t) = 0$) et qu'il reste à l'instant $t+dt$ ($f(\mathbf{x}+d\mathbf{x}, t+dt) = 0$), le déplacement et l'intervalle de temps sont liés par,

$$\nabla f \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (3.7)$$

En divisant par $|\nabla f|$ et en tenant compte de (3.5), on observe que seule la composante normale de la vitesse d'un point attaché à S est donnée par l'équation (3.7),

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_S = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\nabla f|}. \quad (3.8)$$

La vitesse de déplacement de la surface ne dépend pas du paramétrage de la surface, son expression est donc unique tandis que la vitesse d'un point attaché à la surface S dépend du paramétrage. L'exemple suivant illustre ces propriétés.

Exemple de calcul de la vitesse géométrique d'une surface

Considérons un cercle $C(t)$ de rayon unité roulant sans glisser sur le plan $y = 0$ (figure 3.2). Le centre du cercle est initialement placé en $x = 0$ (C_0). Soit θ l'angle polaire d'un point de C_0 et soit ϕ l'angle polaire de ce même point sur le cercle à l'instant t . Si le cercle roule sans glisser sur le plan, on a,

$$\phi(t) = \theta - t, \quad (3.9)$$

Et les coordonnées du point M_1 sont,

$$\mathbf{M}_1(\theta, t) = \begin{cases} x = t + \cos(\theta - t) \\ y = 1 + \sin(\theta - t) \end{cases} \quad (3.10)$$

En revanche, si le cercle est en translation simple avec la même vitesse, l'angle polaire de M_2 est invariant et on a,

$$\phi(t) = \theta, \quad (3.11)$$

et on aura le mouvement suivant,

$$\mathbf{M}_2(\theta, t) = \begin{cases} x = t + \cos(\theta) \\ y = 1 + \sin(\theta) \end{cases} \quad (3.12)$$

La figure 3.3 montre les trajectoires des points M_1 et M_2 placés initialement sur C_0 (figure 3.2) à $\theta = \pi/2$ et $\theta = 0$. La vitesse d'un point attaché au cercle est dans le cas du roulement sans glissement,

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial t} \right)_\theta = [1 + \sin(\theta - t)]\mathbf{e}_x - \cos(\theta - t)\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x - \mathbf{v} \quad (3.13)$$

où \mathbf{u} et \mathbf{v} sont respectivement les directions normales et tangentes au cercle (voir figure 3.2). Dans le cas de la translation on a,

$$\mathbf{v}_2 = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial t} \right)_\theta = \mathbf{e}_x. \quad (3.14)$$

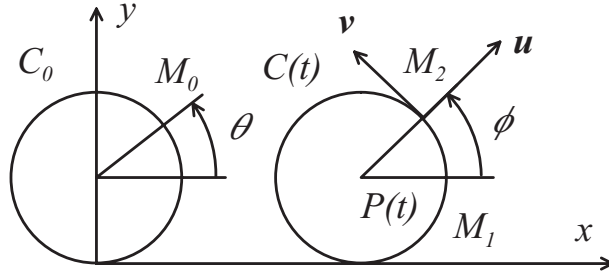


Figure 3.2: Cercle roulant sans glisser sur un plan.

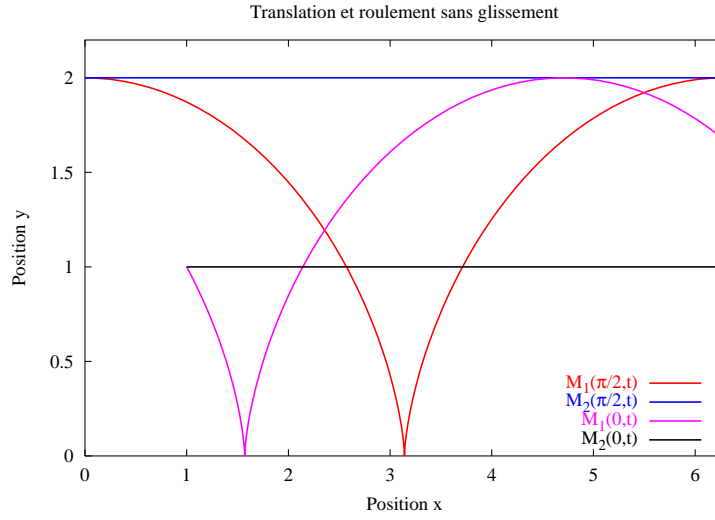


Figure 3.3: Position du point M_1 , qui appartient à un cercle roulant sans glisser sur le plan et d'un point M_2 appartenant à un cercle en translation à la même vitesse. Tracé pour deux positions initiales du point : $\theta = \pi/2$ et 0.

La vitesse d'un point attaché à C est bien la composition d'une translation et d'une rotation dans le premier cas tandis que l'on ne retrouve que la translation dans le dernier cas. Cette vitesse est tangente aux trajectoires de la figure 3.3. La vitesse géométrique de déplacement de chaque point est identique, on a,

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u} = \cos \phi, \quad (3.15)$$

en particulier, elle est nulle en deux points pour $\phi = \pm\pi/2$ où le mouvement s'effectue dans le plan tangent de la surface. Pour les deux mouvements l'équation implicite du cercle $C(t)$ est la suivante,

$$C(t) : f(x, y) = (x - t)^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0, \quad (3.16)$$

on a alors,

$$\nabla f = \begin{cases} 2(x - t) = 2 \cos(\phi) \\ 2(y - 1) = 2 \sin(\phi) \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -2(x - t) = -2 \cos(\phi) \quad (3.18)$$

et en conséquence selon (3.8),

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \cos \phi \quad (3.19)$$

Les théorèmes mathématiques

Les outils nécessaires à l'établissement des équations de bilan à partir des principes fondamentaux sont les suivants.

Le théorème de Gauss ou dit de la divergence ou encore d'Ostrogradski, s'énonce pour tout vecteur \mathbf{B} ou tenseur \mathbb{M} différentiable dans un volume V comme celui représenté à la figure 3.1 et limité par une surface S par,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.20)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à V . On donne une démonstration de ce théorème pour les vecteurs et les tenseurs en annexe au paragraphe A.2.

La règle de Leibniz s'énonce pour toute fonction f définie dans un volume V (figure 3.1) limité par la surface S par,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f \, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, dV + \int_{S(t)} f \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.21)$$

où $\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}$ est la vitesse géométrique de la surface S . Une démonstration en est proposé en annexe au paragraphe A.3.

Si le volume considéré est matériel, c'est-à-dire si tout point attaché à V et S se déplace à la vitesse du fluide, cette règle porte le nom de *théorème de transport de Reynolds*. Elle s'énonce pour un volume matériel $V_m(t)$ limité par une surface matérielle $S_m(t)$ où on rappelle que par définition la vitesse d'un point attaché à la surface est égale à la vitesse du fluide.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f \, dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, dV + \int_{S_m(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.22)$$

Ce théorème s'interprète de façon simple. La variation de l'intégrale de volume est égale à l'intégrale de la variation de f sur le volume augmentée du flux net sortant du volume $V_m(t)$.

3.2.2 Expression des principes fondamentaux pour un volume matériel et les équations locales monophasiques

Les bilans de masse se déduisent du *principe de la conservation de la masse*. Ce principe stipule que la masse d'un volume matériel est invariable. Pour un volume matériel $V_m(t)$ il se traduit mathématiquement par,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \, dV = 0 \quad (3.23)$$

où ρ est la masse volumique du fluide.

Le principe fondamental de la dynamique s'exprime pour un volume matériel et indique que la variation de quantité de mouvement linéaire d'un volume matériel est égale à la somme des forces de volume et de contact appliquées à ce volume. Il se traduit par,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} \, dV = \int_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbb{T} \, dS + \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{F} \, dV \quad (3.24)$$

où \mathbf{v} est la vitesse du fluide, \mathbb{T} est le tenseur des contraintes et \mathbf{F} représente les forces de volume. Le principe fondamental de la dynamique est relatif au torseur des efforts et comprend également

une relation pour la quantité de mouvement angulaire. La variation de quantité de mouvement angulaire est égale à la somme des couples appliqués au fluide. Si le fluide est dit non polaire (Aris, 1962, p. 102), les seuls couples appliqués résultent du moment des forces appliquées et on a,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \int_{S_m(t)} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbb{T}) dS + \int_{V_m(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} dV \quad (3.25)$$

où \mathbf{r} est le vecteur position.

Le premier principe de la thermodynamique exprime l'équivalence entre travail et chaleur. Il stipule que la variation d'énergie totale d'un volume matériel, c'est-à-dire la somme de l'énergie interne u et de l'énergie mécanique $\frac{1}{2}v^2$, où v est le module de la vitesse, est égale à la puissance des efforts appliqués et de la puissance thermique *apportée* au volume matériel. Dans tout ce qui suit, on ne considère pas l'existence de sources de chaleur volumique comme par exemple celles résultant d'un chauffage direct du fluide par effet Joule ou résultant de l'absorption d'un rayonnement. Le seul flux de chaleur apporté provient de la surface matérielle $S_m(t)$ dans ces conditions.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \left(u + \frac{1}{2}v^2 \right) dV = \int_{S_m(t)} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{S_m(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.26)$$

où u est l'énergie interne du fluide, \mathbf{q} est le flux de chaleur et où le signe moins rappelle que la normale à S est dirigée vers l'extérieur de V .

Le second principe de la thermodynamique introduit l'entropie s et indique que c'est une fonction d'état qui pour une transformation réversible est définie par,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.27)$$

où S est l'entropie du système considéré, T est la température et δQ est la quantité de chaleur apportée à la masse de fluide considéré. Le second principe indique que la variation d'entropie d'un système est au moins égale à la variation liée à l'apport de chaleur,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho s dV + \int_{S_m(t)} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS = \int_{V_m(t)} \Delta dV \quad (3.28)$$

où Δ est la source d'entropie volumique et s est l'entropie massique. Le second principe impose que la source d'entropie définie par (3.28) est positive ou nulle,

$$\Delta \geq 0. \quad (3.29)$$

Delhayé (Delhayé *et al.*, 1981, p. 100) propose une notation générale résumant les différentes expressions des principes fondamentaux. En utilisant le tableau 3.1 qui donne la signification de ψ , la quantité transportée, \mathbb{J} le tenseur associé et ϕ la source volumique associée, l'équation de bilan généralisée s'écrit alors,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \psi dV = \int_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbb{J} dS + \int_{V_m(t)} \rho \phi dV \quad (3.30)$$

Les équations locales s'en déduisent en appliquant le théorème de transport de Reynolds (3.22),

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} dV + \int_{S_m(t)} \rho \psi \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = \int_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbb{J} dS + \int_{V_m(t)} \rho \phi dV, \quad (3.31)$$

Bilan	ψ	\mathbb{J}	ϕ
Masse	1		
Q. de M. linéaire	\mathbf{v}	$-\mathbb{T}$	\mathbf{F}
Q. de M. angulaire	$\mathbf{r} \times \mathbf{v}$	$-\mathbb{T} \cdot \mathbb{R}$	$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Energie totale	$u + \frac{1}{2}v^2$	$\mathbf{q} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{v}$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$
Entropie	s	$\frac{\mathbf{q}}{\mathbb{T}}$	$\frac{\Delta}{\rho}$

Tableau 3.1: Définition des variables pour les équations de bilan monophasiques généralisées d'après Delhay *et al.* (1981). \mathbf{v} est la vitesse, \mathbb{T} est le tenseur des contraintes, \mathbf{F} sont les forces de volume, \mathbf{q} est le flux de chaleur et u et s sont respectivement l'énergie interne massique et l'entropie massique et \mathbb{R} est le tenseur antisymétrique associé au vecteur position \mathbf{r} , $R_{ij} = \epsilon_{ijk} r_k$.

puis en appliquant le théorème de Gauss (3.20) aux intégrales de surface. En regroupant tous les termes dans le même membre, on obtient,

$$\int_{V_m(t)} \left(\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \psi \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbb{J} - \rho \phi \right) dV = 0 \quad (3.32)$$

L'expression des principes fondamentaux est indépendante du choix du volume servant à l'exprimer. En conséquence l'intégrale de volume (3.32) doit être nulle pour tout volume V_m considéré et l'expression sous le signe somme de (3.32) doit donc être identiquement nulle, ce qui démontre les équations locales,

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \psi \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbb{J} - \rho \phi = 0. \quad (3.33)$$

3.3 Etablissement des équations locales et instantanées

L'établissement des équations locales des écoulements diphasiques repose sur l'application des principes fondamentaux sur un volume matériel comprenant une interface qui est considérée comme une surface de discontinuité des différentes variables.

On utilise ensuite une extension de la règle de Leibniz appliquée à un volume matériel comprenant une surface de discontinuité. Cette règle qui d'après Aris (1962, p. 86) est due à Truesdell et Toupin s'énonce de la façon suivante.

Considérons un volume matériel $V_m(t)$ traversé par une surface de discontinuité $A_i(t)$ non nécessairement matérielle (voir figure 3.4). Le volume matériel est constitué par la réunion des deux volumes contenant chaque phase, $V_m(t) = V_1(t) \cup V_2(t)$ et est limité par la surface matérielle $S_m(t) = A_1(t) \cup A_2(t)$. Alors,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S_m(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{A_i(t)} (f_1 \mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_1 + f_2 \mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_2) dS. \quad (3.34)$$

où f_1 and f_2 sont respectivement les valeurs de f de part et d'autre de la discontinuité \mathbf{n}_k , $k = 1, 2$, est la normale à la surface de discontinuité $A_i(t)$ orientée vers l'extérieur de $V_k(t)$ et $\mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}$ est la vitesse géométrique de déplacement de l'interface $A_i(t)$.

Cette identité est une conséquence directe de la règle de Leibniz appliquée successivement aux volumes $V_1(t)$ et $V_2(t)$. On obtient, en notant que V_k est limité par les surfaces A_k et A_i , pour V_1 ,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_1(t)} f dV = \int_{V_1(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_1(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{A_i(t)} f_1 \mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_1 dS, \quad (3.35)$$

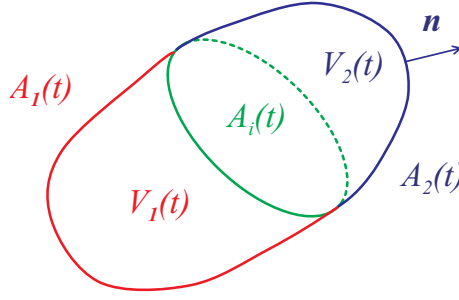


Figure 3.4: Volume matériel comprenant une interface considérée comme une surface de discontinuité. Les bilans de masse, de quantité de mouvement, d'énergie totale et d'entropie sont écrit pour ce volume.

puis sur V_2 , on a,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_2(t)} f dV = \int_{V_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_2(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{A_i(t)} f_2 \mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_2 dS. \quad (3.36)$$

En additionnant membres à membres (3.35) et (3.36), on démontre l'extension de la règle de Leibniz (3.34).

En appliquant, de plus, le théorème de Gauss successivement au volumes V_1 puis V_2 à la fonction $f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, on a, pour le premier volume,

$$\int_{A_1(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_1(t)} \nabla \cdot (f \mathbf{v}) dV - \int_{A_i(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.37)$$

En substituant cette expression dans (3.35) et l'expression analogue pour V_2 dans (3.36) on obtient l'identité suivante,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \nabla \cdot (f_k \mathbf{v}_k) \right) dV - \sum_{k=1,2} \int_{A_i(t)} f_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_k dS.} \quad (3.38)$$

3.3.1 Le bilan de masse

La variation de masse du volume diphasique matériel de la figure 3.4 est nulle (3.23). En appliquant l'identité (3.38), on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = \\ \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) \right) dV - \int_{A_i(t)} \left(\sum_{k=1,2} \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_k \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.3.2 Le bilan de quantité de mouvement

La variation de quantité de mouvement du volume matériel diphasique de la figure 3.4 est égale à la somme des forces de volume et de surface appliquées sur ce domaine (3.24). En appliquant l'identité (3.38), on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV = \\ \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left(\frac{\partial \rho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) \right) dV - \sum_{k=1,2} \int_{A_i(t)} \rho_k \mathbf{v}_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_k dS = \\ \sum_{k=1,2} \int_{A_k(t)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k dS + \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \rho_k \mathbf{F}_k dV \end{aligned} \quad (3.40)$$

Par souci de simplicité, l'effet des tensions de surfaces n'a pas été pris en compte. La prise en compte de la tension superficielle est décrite par Delhay (1974). En appliquant le théorème de Gauss à l'intégrale des contraintes sur A_1 puis A_2 , on obtient,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left(\frac{\partial \rho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) - \nabla \cdot \mathbb{T}_k - \rho_k \mathbf{F}_k \right) dV \\ & - \int_{A_i(t)} \left(\sum_{k=1,2} \rho_k \mathbf{v}_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.3.3 Le bilan d'énergie totale

La variation de l'énergie totale (énergie interne et énergie cinétique) du volume matériel diphasique de la figure 3.4 est égale à la somme de la puissance des forces de volume et de surface appliquées sur ce domaine et de la puissance thermique apportée au volume de contrôle (3.26). En appliquant l'identité (3.38), on obtient,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \\ & \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v}_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) \right\} dV \\ & - \sum_{k=1,2} \int_{A_i(t)} \rho_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_k dS = \\ & \sum_{k=1,2} \int_{A_k(t)} (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k) \cdot \mathbf{v}_k dS + \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k dV - \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k dV \end{aligned} \quad (3.42)$$

où par souci de cohérence avec le bilan de quantité de mouvement, l'effet de la tension superficielle n'a pas été prise en compte. En appliquant le théorème de Gauss aux intégrales de surface relatives au flux de chaleur et à la puissance des contraintes sur A_1 et A_2 , on obtient,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v}_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) - \nabla \cdot (\mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) - \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k + \nabla \cdot \mathbf{q}_k \right) dV \\ & - \int_{A_i(t)} \left(\sum_{k=1,2} \rho_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_k - \mathbf{n}_k \cdot (\mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) + \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.3.4 Le bilan d'entropie

Le milieu diphasique comprend des sources d'entropie dans chaque phase et également une source d'entropie à l'interface. En effet le changement de phase s'accompagne généralement de phénomènes irréversibles. Le bilan d'entropie du volume matériel diphasique s'énonce donc,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho s dV + \int_{S_m(t)} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} dS = \\ & + \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_k s_k + \nabla \cdot \rho_k s_k \mathbf{v}_k \right) dV - \sum_{k=1,2} \int_{A_i(t)} \rho_k s_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_k dS \\ & + \sum_{k=1,2} \int_{A_k(t)} \mathbf{n}_k \cdot \frac{\mathbf{q}_k}{T_k} dS = \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \Delta_k dV + \int_{A_i} \Delta_i dS. \end{aligned} \quad (3.44)$$

En appliquant le théorème de Gauss aux intégrales de surface représentant la source d'entropie relative au flux de chaleur sur A_1 et A_2 , et en regroupant les différents termes,

Bilan	ψ_k	\mathbb{J}_k	ϕ_k	ϕ_i
Masse	1			
Q. de M. linéaire	\mathbf{v}_k	$-\mathbb{T}_k$	\mathbf{F}_k	
Q. de M. angulaire	$\mathbf{r} \times \mathbf{v}_k$	$-\mathbb{T}_k \cdot \mathbb{R}$	$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_k$	
Energie totale	$u_k + \frac{1}{2}v_k^2$	$\mathbf{q}_k - \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k$	$\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k$	
Entropie	s_k	$\frac{\mathbf{q}_k}{T_k}$	$\frac{\Delta_k}{\rho_k}$	Δ_i

Tableau 3.2: Définition des variables pour les équations de bilan diphasiques généralisées d'après Delhay *et al.* (1981). L'indice k est relatif à la phase k , \mathbf{v} est la vitesse, \mathbb{T} est le tenseur des contraintes, \mathbf{F} sont les forces de volume, \mathbf{q} est le flux de chaleur et u et s sont respectivement l'énergie interne massique et l'entropie massique et \mathbb{R} est le tenseur antisymétrique associé au vecteur position \mathbf{r} , $R_{ij} = \epsilon_{ijk} r_k$.

on obtient,

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_k s_k + \nabla \cdot \rho_k s_k \mathbf{v}_k + \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}_k}{T_k} - \Delta_k \right) dV \\
& - \sum_{k=1,2} \left(\int_{A_i(t)} \rho_k s_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_k + \mathbf{n}_k \cdot \frac{\mathbf{q}_k}{T_k} + \Delta_i \right) dS = 0
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Le second principe se résume à,

$$\Delta_k \geq 0 \text{ et } \Delta_i \geq 0 \tag{3.46}$$

3.3.5 Forme générale des bilans globaux et les équations locales

Les différents bilans globaux que nous venons d'établir (3.39), (3.41), (3.43) et (3.45) peuvent se mettre sous la forme générale suivante (Delhay *et al.*, 1981, p. 101)

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \psi_k) + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot \mathbb{J}_k - \rho_k \phi_k \right) dV \\
& + \int_{A_i(t)} \sum_{k=1,2} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k + \phi_i) = 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

où la définition des différentes quantités est donnée au tableau 3.2. On a introduit dans cette équation la notation,

$$\dot{m}_k = \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_k \tag{3.48}$$

où \dot{m}_k représente la densité de flux de masse à l'interface. En effet, intégrée sur toute l'interface, cette quantité représente la masse quittant le domaine V_k c'est-à-dire la phase k , à travers de l'interface.

L'équation (3.47) doit être vérifiée quelque soit le volume matériel considéré, c'est-à-dire quels que soient les volumes $V_1(t)$, $V_2(t)$ et la position de l'interface $A_i(t)$. En conséquence, chaque expression apparaissant dans les intégrales de volume et de surface doit être identiquement nulle. Ce qui donne les équations locales phasiques qui doivent être satisfaites en tous points des phases,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \psi_k) + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot \mathbb{J}_k - \rho_k \phi_k = 0, \tag{3.49}$$

et les relations qui doivent être satisfaites en tous points de l'interface,

$$\sum_{k=1,2} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k + \phi_i) = 0. \tag{3.50}$$

Les équations locales sont semblables à celles des écoulements monophasiques (3.33) et possèdent donc la même signification. En revanche, les relations de saut à l'interface sont la conséquence des principes fondamentaux appliqués à un milieu comprenant des interfaces considérées comme des surfaces de discontinuité. Ces équations représentent donc une caractéristique originale des écoulements diphasiques.

3.4 Les équations locales et les relations de saut aux interfaces

L'application des principes fondamentaux conduit à l'établissement d'équations locales devant être satisfaites en tout point des phases et à des relations de saut aux interfaces. On qualifie ces équations et relations de primaires lorsqu'elles découlent immédiatement de l'application des principes fondamentaux. Les équations primaires sont indépendantes. Les équations obtenues par combinaison de plusieurs équations primaires sont qualifiées de secondaires. Les équations secondaires sont la conséquence directe des équations primaires et n'en sont donc pas indépendantes.

3.4.1 Equations locales primaires

Elles sont données par l'équation générale (3.49). En les explicitant à l'aide du tableau 3.2, on obtient les relations suivantes.

Bilan de masse

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0 \quad (3.51)$$

Cette équation est aussi connue sous le nom d'équation de continuité.

Bilan de quantité de mouvement linéaire

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) - \nabla \cdot \mathbb{T}_k - \rho_k \mathbf{F}_k = 0 \quad (3.52)$$

Dans le cas d'un fluide Newtonien où le tenseur des contraintes est donné par la loi de Navier et comprend une partie, $-p\mathbb{I}$, liée à la pression hydrostatique, p et une partie visqueuse, \mathbb{V} linéaire en vitesse de déformation du milieu qui est nulle en l'absence de mouvement. On a alors en notation vectorielle et en composantes,

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= -p\mathbb{I} + \mathbb{V} \\ T_{ij} &= -p\delta_{ij} + V_{ij} \end{aligned} \quad (3.53)$$

La partie visqueuse est composée d'une partie isotrope liée à la viscosité de volume ζ et une partie de cisaillement pur liée à la viscosité classique μ . Dans la plupart des applications on peut négliger la viscosité de volume (Relation de Stokes selon Aris, 1962, p. 112). Bird *et al.* (1960, p. 79) indiquent par ailleurs que ζ est nul pour les gaz monoatomiques à basse pression et fournit quelques références permettant d'estimer sa valeur dans d'autres cas.

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= (\zeta - \frac{2}{3}\mu)(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbb{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) \\ V_{ij} &= (\zeta - \frac{2}{3}\mu)\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Le bilan de quantité de mouvement (3.52), fermé par les équations de Navier (3.53) et (3.54) donne les équations de Navier-Stokes.

Bilan de quantité de mouvement angulaire

L'annexe B montre que lorsque le tenseur des contraintes est symétrique, le bilan de quantité de mouvement angulaire est une conséquence du bilan de quantité de mouvement linéaire. Réciproquement, pour vérifier le bilan de quantité de mouvement angulaire, il suffit que le tenseur des contraintes soit symétrique.

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (3.55)$$

C'est le cas notamment des fluides newtoniens (3.53) et (3.54).

Bilan d'énergie totale

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v}_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) - \nabla \cdot (\mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) - \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k + \nabla \cdot \mathbf{q}_k = 0 \quad (3.56)$$

Inégalité entropique

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k s_k + \nabla \cdot (\rho_k s_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}_k}{T_k} = \Delta_k \geq 0 \quad (3.57)$$

3.4.2 Equations locales secondaires

En combinant les équations précédentes, on peut obtenir le bilan d'énergie mécanique (équation de Bernoulli), le bilan d'énergie interne et d'enthalpie (équation de la chaleur). En combinant ces dernières équations on peut en déduire le bilan d'entropie et identifier les sources d'entropie. L'application du second principe introduit alors des contraintes sur les lois constitutives des fluides.

Bilan d'énergie mécanique

Le bilan de quantité de mouvement combiné avec le bilan de masse (3.51) peut s'écrire,

$$\rho_k \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \mathbf{v}_k - \nabla \cdot \mathbb{T}_k - \rho_k \mathbf{F}_k = 0. \quad (3.58)$$

En multipliant scalairement ce bilan de quantité de mouvement par la vitesse on obtient,

$$\rho_k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v_k^2 \right) + \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v_k^2 \right) - (\nabla \cdot \mathbb{T}_k) \cdot \mathbf{v}_k - \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k = 0. \quad (3.59)$$

En combinant à nouveau cette équation avec le bilan de masse (3.51), on obtient le bilan d'énergie mécanique,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_k v_k^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_k v_k^2 \mathbf{v}_k \right) - (\nabla \cdot \mathbb{T}_k) \cdot \mathbf{v}_k - \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k = 0. \quad (3.60)$$

Le troisième terme se décompose en utilisant l'identité,

$$\nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} v_j = v_j \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} + T_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) + \mathbb{T} : \nabla \mathbf{v} \quad (3.61)$$

Ce qui donne une expression cohérente avec le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_k v_k^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_k v_k^2 \mathbf{v}_k \right) - \nabla \cdot (\mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) - \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k + \mathbb{T}_k : \nabla \mathbf{v}_k = 0. \quad (3.62)$$

La variation d'énergie mécanique est égale à la puissance des forces de contact, des forces de volume et des contraintes intérieures. Le dernier terme peut encore être décomposé en utilisant la décomposition du tenseur des contraintes en partie visqueuse et contribution de la pression (3.53),

$$\mathbb{T}_k : \nabla \mathbf{v}_k = -p_k \nabla \cdot \mathbf{v}_k + \mathbb{V}_k : \nabla \mathbf{v}_k, \quad (3.63)$$

où la puissance des contraintes intérieures comprend une partie réversible liée au travail de compression du fluide et une partie dissipative liée à la puissance des contraintes visqueuses. En notant que d'après le bilan de masse,

$$p_k \nabla \cdot \mathbf{v}_k = -\frac{p_k}{\rho_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \mathbf{v}_k \cdot \nabla \rho_k \right) = -\frac{p_k}{\rho_k} \frac{d\rho_k}{dt} = \rho_k p_k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_k} \right), \quad (3.64)$$

on montre que le premier terme du membre de droite de (3.63) est bien lié à la puissance des efforts de compression du fluide.

Bilan d'énergie interne

En soustrayant le bilan d'énergie mécanique (3.62) au bilan d'énergie totale, on obtient le bilan d'énergie interne,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k u_k + \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v}_k u_k + \nabla \cdot \mathbf{q}_k - \mathbb{T}_k : \nabla \mathbf{v}_k = 0. \quad (3.65)$$

Cette équation est cohérente avec le premier principe. En utilisant le bilan de masse et (3.63) et en rappelant que la dérivée convective d'une fonction quelconque, f , en suivant le mouvement du fluide (A.29) est donnée par

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (3.66)$$

le bilan d'énergie interne devient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_k u_k + \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v}_k u_k &= \rho_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \mathbf{v}_k \cdot \nabla u_k \right) + u_k \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \rho_k \nabla \cdot \mathbf{v}_k \right) = \\ &= \rho_k \frac{du_k}{dt} = -p_k \nabla \cdot \mathbf{v}_k + \mathbb{V}_k : \nabla \mathbf{v}_k - \nabla \cdot \mathbf{q}_k \end{aligned} \quad (3.67)$$

La variation d'énergie interne est égale à la somme de la puissance des efforts de compression et des puissances thermiques apportées au fluide par la dissipation visqueuse et le flux de chaleur. Lorsque le flux de chaleur est fermé par la loi de Fourier,

$$\mathbf{q}_k = -k_k \nabla T_k, \quad (3.68)$$

où k_k est la conductivité thermique de la phase k . Le bilan d'énergie interne donne l'équation de la chaleur.

Bilan d'enthalpie

En introduisant l'enthalpie massique, i_k définie par,

$$u_k = i_k - \frac{p_k}{\rho_k}, \quad (3.69)$$

et la décomposition de la puissance des efforts intérieurs (3.63), on obtient,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k i_k) + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k i_k) - \frac{\partial p_k}{\partial t} - \mathbf{v}_k \cdot \nabla p_k + \nabla \cdot \mathbf{q}_k - \mathbb{V}_k : \nabla \mathbf{v}_k = 0. \quad (3.70)$$

Bilan d'entropie et sources d'entropie

En effectuant la manipulation du bilan d'énergie interne (3.67) sur l'inégalité entropique (3.57), on obtient,

$$\rho_k \frac{ds_k}{dt} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}_k}{T_k} = \Delta_k. \quad (3.71)$$

En rappelant la relation thermodynamique de Gibbs,

$$du = Tds - pdv \quad (3.72)$$

où v est le volume spécifique ($v = 1/\rho$) et en considérant le mouvement du fluide et le bilan de masse (3.64), on obtient,

$$\frac{du_k}{dt} = T_k \frac{ds_k}{dt} - p_k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_k} \right) = T_k \frac{ds_k}{dt} - \frac{p_k}{\rho_k} \nabla \cdot \mathbf{v}_k. \quad (3.73)$$

En reportant cette équation dans le bilan d'énergie interne (3.67), on obtient le bilan d'entropie,

$$\rho_k \frac{ds_k}{dt} = -\frac{1}{T_k} \nabla \cdot \mathbf{q}_k + \frac{1}{T_k} \mathbb{V}_k : \nabla \mathbf{v}_k. \quad (3.74)$$

En rapprochant cette équation de l'inégalité entropique, on identifie les sources d'entropie,

$$\Delta_k = \mathbf{q}_k \cdot \nabla \frac{1}{T_k} + \frac{1}{T_k} \mathbb{V}_k : \nabla \mathbf{v}_k \geq 0. \quad (3.75)$$

Cette équation justifie le caractère irréversible attribué à la dissipation visqueuse ($\mathbb{V}_k : \nabla \mathbf{v}_k$). Pour que l'inégalité (3.75) soit vérifiée quelles que soient les évolutions du fluide, il faut que chaque terme soit positif, ce qui impose au flux de chaleur d'être opposé au gradient de température, la chaleur doit aller du chaud vers le froid et à la fonction de dissipation d'être non négative.

En considérant un fluide obéissant à la loi de Fourier (3.68) et de Navier (3.54) le calcul des sources d'entropie donne,

$$\Delta_k = k_k \frac{(\nabla T_k)^2}{T_k^2} + \frac{\zeta_k}{T_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\mu_k}{2T_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right). \quad (3.76)$$

Les coefficients de k_k , ζ_k , μ_k étant strictement non négatifs¹ l'inégalité entropique impose,

$$k_k \geq 0, \mu_k \geq 0 \text{ et } \lambda_k \geq 0 \quad (3.77)$$

3.4.3 Relations de saut primaires*Masse*

En utilisant le tableau 3.2, la relation de saut relative à la masse (3.50) exprime le bilan de masse à l'interface,

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0, \quad (3.78)$$

¹La preuve repose simplement sur l'identité que l'on obtient en distribuant le second terme du produit $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij}$ $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij} = 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$

soit en prenant en compte la définition (3.48) de \dot{m}_k ,

$$\rho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_1 + \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_2 = 0. \quad (3.79)$$

Lorsque qu'il n'y a pas de changement de phase à l'interface,

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 0, \quad (3.80)$$

ainsi, en conséquence de la définition (3.48) de \dot{m}_k ,

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_1, \quad (3.81)$$

les vitesses normales à l'interface sont continues et égales à la vitesse géométrique d'interface. Cette condition parfois appelée condition cinématique régit les vitesses au voisinage de l'interface d'un gaz et d'un liquide. De plus lorsque l'on admet la condition d'adhérence à l'interface, les composantes tangentielles des vitesses sont aussi égales et alors $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Dans le cas contraire, les trois vitesses apparaissant à l'interface sont toujours différentes. Dans ce cas plus général, on peut à partir de la définition (3.48) de \dot{m}_k et du bilan de masse à l'interface exprimer la composante normale de la vitesse en fonction de l'intensité du changement de phase et de la vitesse géométrique de l'interface,

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_1 + \frac{\dot{m}_1}{\rho_1}, \quad (3.82)$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_1 + \frac{\dot{m}_1}{\rho_2}. \quad (3.83)$$

Le saut de vitesse normale à l'interface est alors,

$$(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = \dot{m}_1 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right). \quad (3.84)$$

Considérons la situation simple l'un liquide (fluide 1) disposé dans un récipient ouvert (figure 3.5) dont la surface libre est baignée par la vapeur du liquide (fluide 2). Supposons que le liquide est au repos ($\mathbf{v}_1 = 0$) et que les écoulements restent monodimensionnels. Les équations (3.82) et (3.83) donnent la vitesse géométrique de l'interface,

$$\mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_1 = -\frac{\dot{m}_1}{\rho_1}. \quad (3.85)$$

S'il y a évaporation, ($\dot{m}_1 > 0$), on s'attend en effet à ce que la surface libre descende. La vapeur s'échappe du récipient à la vitesse,

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = \dot{m}_1 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right). \quad (3.86)$$

Pour un liquide et sa vapeur, on a $\rho_1 > \rho_2$, la vitesse de la vapeur est donc positive.

Quantité de mouvement

En utilisant le tableau 3.2, la relation de saut relative à la quantité de mouvement linéaire (3.50) exprime l'équilibre mécanique de l'interface,

$$\dot{m}_1 \mathbf{v}_1 + \dot{m}_2 \mathbf{v}_2 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2 = 0. \quad (3.87)$$

En prenant en compte la décomposition du tenseur des contraintes (3.53) et le bilan de masse à l'interface (3.78) on a,

$$\dot{m}_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (p_1 - p_2)\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2) = 0. \quad (3.88)$$

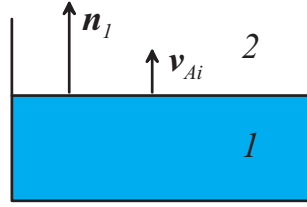


Figure 3.5: Schéma d'un récipient ouvert contenant un liquide dont la surface libre baigne dans la vapeur du fluide considéré.

En décomposant la vitesse en une partie normale et tangente à l'interface,

$$\mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_k^t = \mathbf{v}_k^n + \mathbf{v}_k^t \quad (3.89)$$

La relation de saut vectorielle vectorielle peut se projeter sur la direction normale à l'interface,

$$\dot{m}_1(v_1^n - v_2^n) + (p_1 - p_2) - \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \quad (3.90)$$

et sur une direction quelconque, \mathbf{t} , appartenant au plan tangent de l'interface,

$$\dot{m}_1(\mathbf{v}_1^t - \mathbf{v}_2^t) \cdot \mathbf{t} - \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (3.91)$$

Ainsi en absence de tension superficielle et de changement de phase, on obtient

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2 = 0, \quad (3.92)$$

la contrainte normale est continue à l'interface.

Pour des fluides non visqueux, on obtient,

$$\dot{m}_1(v_1^n - v_2^n) + (p_1 - p_2), \quad (3.93)$$

$$\mathbf{v}_1^t = \mathbf{v}_2^t, \quad (3.94)$$

les composantes tangentielles des vitesses sont égales et il existe un saut de pression lié au changement de phase. Ce saut de pression conserve la même expression même en présence de fluides visqueux, lorsque la situation est monodimensionnelle. Par exemple, lorsque l'interface est plane et que les écoulements sont perpendiculaires à l'interface, la vitesse ne comporte qu'une seule composante uniforme selon la direction de la normale, en conséquence \mathbb{V} est identiquement nul. En prenant en compte la relation (3.84) déduite du bilan de masse à l'interface on a,

$$p_1 - p_2 = \dot{m}_1(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = \dot{m}_1^2 \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right). \quad (3.95)$$

La pression est toujours plus forte dans le fluide le plus dense quelque soit le sens du changement de phase. Cet effet est notable lorsque l'on évapore un liquide sous vide sous l'action d'un rayonnement intense. La surface libre du bain se creuse sous la tache éclairée. L'équation (3.95) exprime l'effet de recul induit par l'augmentation de la vitesse au passage de l'interface lié au changement de phase. De même, lorsqu'une bulle croît au voisinage d'une paroi chauffante, l'essentiel du changement de phase a lieu au voisinage immédiat de la paroi et l'effet de recul a tendance à augmenter la surface de base de la bulle.

Lorsque la tension de surface doit être prise en compte (Delhaye, 1974), le bilan de quantité de mouvement à l'interface s'écrit (voir annexe D),

$$\dot{m}_1 \mathbf{v}_1 + \dot{m}_2 \mathbf{v}_2 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2 = -\nabla_S \sigma + \sigma \mathbf{n} \nabla_S \cdot \mathbf{n}, \quad (3.96)$$

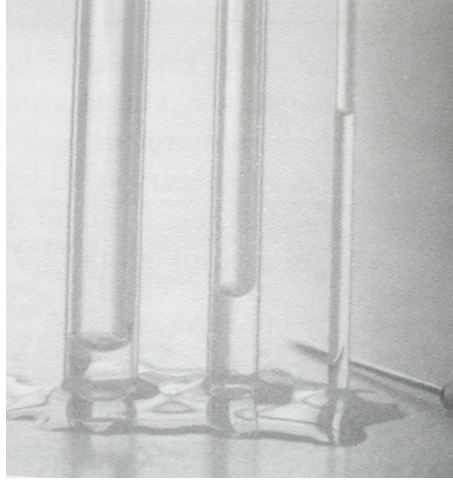


Figure 3.6: Montée capillaires dans des tubes de différents diamètres, illustration de la loi de Jurin (d'après de Gennes *et al.* , 2002).

où σ est la tension superficielle, ∇_S et $\nabla_S \cdot$ sont respectivement les opérateurs de gradient et de divergence de surface et \mathbf{n} est la normale définie par le système de coordonnées choisi sur la surface (voir annexe D).

Les deux nouveaux termes dans le bilan de quantité de mouvement permettent d'interpréter deux effets élémentaires: la pression capillaire et l'effet Marangoni.

La pression capillaire.

La figure 3.6 montre que le liquide contenu dans un tube de petit diamètre monte par capillarité. L'effet est d'autant plus grand que le diamètre du tube est petit et que le liquide mouille facilement la paroi. La loi de Jurin montre expérimentalement que la montée capillaire est inversement proportionnelle au diamètre du tube et dépend de la nature du fluide et de la paroi du tube.

En en considérant l'équilibre statique du système, on se convainc facilement qu'en absence de mouvement dans le fluide la répartition de pression au sein du liquide est hydrostatique. La pression du gaz qui baigne l'interface peut être considérée constante en raison de sa masse volumique beaucoup plus faible. La pression atmosphérique s'applique aussi à l'extrémité inférieure du tube. L'équilibre statique de cette situation peut être analysé à l'aide de la figure 3.7. En première approximation, en considérant l'interface à peu près plane, la même pression s'appliquant à chaque extrémité du tube, le poids de la colonne n'est pas équilibré par la résultante des efforts de pression appliqués à chaque extrémité du tube.

L'interface se comporte comme "une peau" qui s'accroche à la paroi du tube. Cette peau se tend et développe une tension dirigée vers le haut, appliquée à l'intersection de l'interface et de la paroi. La résultante de ces efforts de tension équilibre le poids de la colonne d'eau,

$$2\pi RT = \rho_L g \pi R^2 h \quad (3.97)$$

où T est la tension, R est le rayon du tube, h est la hauteur de la colonne d'eau et g l'intensité de la pesanteur. La montée capillaire est bien reproduite par le bilan simple (3.97), en effet,

$$h = \frac{2T}{\rho_L g R} \quad (3.98)$$

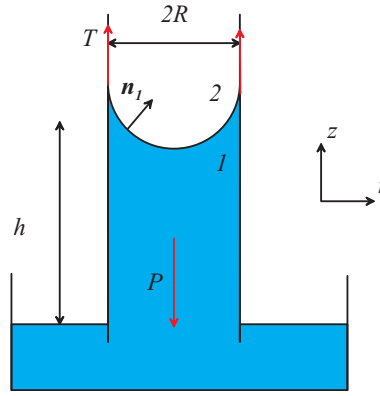


Figure 3.7: Schéma décrivant la surface libre d'un liquide mouillant la paroi d'un tube. Le liquide est en dessous (1) et est baigné par un gaz (2).

La hauteur est bien inversement proportionnelle au rayon du tube. En prenant comme image de l'interface une membrane d'une baudruche, on comprend que l'existence d'une tension s'accompagne nécessairement d'un saut de pression à l'interface. On montre que la surpression interne d'une membrane sphérique est liée à la tension (voir annexe D) que l'on notera σ dorénavant par,

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (3.99)$$

En absence de changement de phase et de mouvement, le bilan de quantité de mouvement à l'interface (3.96) se réduit à,

$$p_1 \mathbf{n}_1 + p_2 \mathbf{n}_2 = -\nabla_S \sigma + \sigma \mathbf{n} \nabla_S \cdot \mathbf{n}, \quad (3.100)$$

On montre que le premier terme qui est un gradient de surface est situé dans le plan tangent à l'interface. La tension est pour une membrane ce qu'est la pression pour un fluide, une membrane en équilibre statique développe une tension uniforme (Coutris, 1993). En conséquence lorsque l'interface est en équilibre, le premier terme du membre de droite de (3.100) est identiquement nul. Le second est dirigé selon la normale à l'interface et peut équilibrer les termes du membre de gauche. De plus, on a l'identité suivante,

$$\nabla_S \cdot \mathbf{n} = -2H \quad (3.101)$$

où H est la courbure moyenne de l'interface. La courbure moyenne est une grandeur géométrique signée dont le sens ne dépend que du choix des paramètres décrivant la surface. L'annexe D indique les procédures de calcul pratique de $2H$ et \mathbf{n} . On y montre notamment que pour une sphère représentée en coordonnées cylindriques ou cartésiennes, on a en tous points,

$$2H \mathbf{n} = -\frac{2}{R} \mathbf{n} \quad (3.102)$$

et que la normale \mathbf{n} définie par le choix des coordonnées est orientée vers l'extérieur de la sphère. On a donc en l'occurrence $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$. Quoi qu'il en soit, avec l'image de la baudruche en tête, il est simple de se souvenir que la surpression capillaire s'exerce toujours dans la concavité de l'interface indépendamment de la nature des phases qu'elle sépare. Le bilan de quantité de mouvement relatif à l'interface de la situation décrite à la figure 3.7 s'écrit,

$$p_1 - p_2 = -\frac{2\sigma}{R} < 0 \quad (3.103)$$

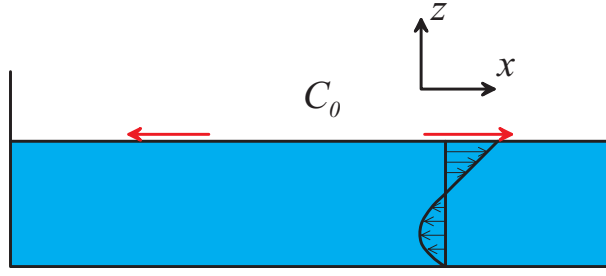


Figure 3.8: Schéma décrivant l'effet des tension de Marangoni induites par une variation de concentration d'éléments tensioactifs à l'interface.

La tension de surface de l'eau et de l'air est de 72 mN/m environ à température ambiante ce qui prédit une montée capillaire de 14 mm environ dans un tube de 1 mm de diamètre. C'est bien l'ordre de grandeur observé à la figure 3.6.

L'effet Marangoni

La tension de surface d'une membrane en équilibre mécanique est uniforme. Toutefois cette dernière varie en fonction de la température et peut être modifiée en présence de produit tensioactifs. Notamment en présence d'un gradient de température, un gradient de tension de surface peut se développer et il en résulte une contrainte de cisaillement appliquée sur les fluides environnants.

Une expérience simple permet de mettre en évidence ce phénomène (figure 3.8). Dans un récipient on place de l'eau sur laquelle on dépose des petites particules comme par exemple du poivre en poudre. On dépose au centre du récipient un tensioactif ménager. Le tensioactif généralement abaisse la tension de surface,

$$\frac{d\sigma}{dC} < 0 \quad (3.104)$$

où C est la concentration de surface en tensioactifs. La concentration en tensioactifs est initialement nulle, si bien qu'aux premiers instants, la concentration à l'interface décroît du centre vers les bords. Sur la partie droite de la figure,

$$\frac{\partial C}{\partial x} < 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{d\sigma}{dC} \frac{\partial C}{\partial x} > 0. \quad (3.105)$$

L'expérience montre que l'on induit un mouvement centrifuge des particules déposées sur la surface libre. Ce mouvement est donc accompagné d'une contrainte de cisaillement appliquée au liquide par l'interface (figure 3.8) dirigée vers les bords du récipient. Sur la partie droite, on a

$$V_{xz} = \mu_L \frac{\partial v_x}{\partial z} > 0. \quad (3.106)$$

Le mouvement cesse assez rapidement. En effet, le tensioactif peuple rapidement l'interface et la tension de surface se stabilise alors à une nouvelle valeur, en général plus faible, mais uniforme. Une tension non uniforme dans une membrane n'est pas une situation d'équilibre, elle ne peut être équilibrée que par une contrainte de cisaillement appliquée à sa surface. C'est précisément ce qu'indique le bilan de quantité de mouvement à l'interface (3.96). Pour une interface plane on a,

$$-\mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2 = -\nabla_S \sigma. \quad (3.107)$$

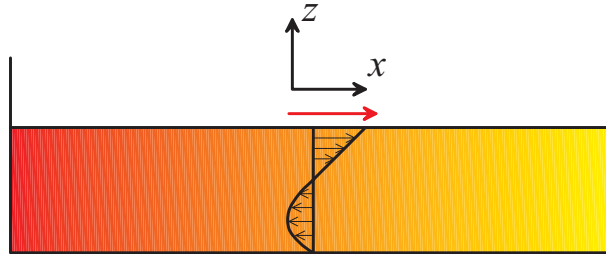


Figure 3.9: Schéma décrivant la convection par effet Marangoni. On chauffe à gauche et on refroidit à droite. Le transport induit par l'effet Marangoni est orienté du chaud vers le froid.

La projection sur la normale de cette équation indique que les pressions (plus précisément la contrainte normale totale) est continue à l'interface et la projection sur la direction \mathbf{e}_x , parallèle à l'interface donne,

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1 \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2 \cdot \mathbf{e}_x = \nabla_S \sigma \cdot \mathbf{e}_x. \quad (3.108)$$

En négligeant le cisaillement coté air (2), on a,

$$V_{1zx} = \mu_L \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nabla_S \sigma \cdot \mathbf{e}_x = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (3.109)$$

L'effet Marangoni peut également se développer si la tension de surface varie avec la température (figure 3.9). La tension de surface diminue généralement avec l'augmentation de la température. La structuration interne d'une interface est responsable de la tension de surface. C'est la raison pour laquelle sa disparition au delà de la température critique d'un fluide est corrélée à la disparition des interfaces.

$$\frac{d\sigma}{dT} < 0. \quad (3.110)$$

Si l'on chauffe à gauche et que l'on refroidit à droite, alors la température décroît selon x , et

$$\frac{\partial T}{\partial x} < 0. \quad (3.111)$$

Dans ces conditions, le bilan de quantité de mouvement à l'interface et toujours donné par (3.109) et on a,

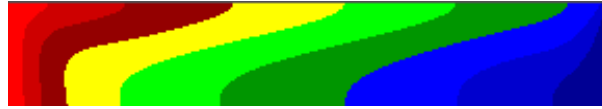
$$V_{1zx} = \mu_L \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nabla_S \sigma \cdot \mathbf{e}_x = \frac{d\sigma}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} > 0. \quad (3.112)$$

Une illustration du transport par effet Marangoni est présentée à la figure 3.10. On observe nettement la déformation des isothermes induite par le mouvement de convection qui s'effectue du chaud vers le froid au voisinage de l'interface. La convection Marangoni est présente dans de nombreux procédés industriels comme le soudage, l'élaboration de matériaux comme le silicium monocristalin et l'évaporation des métaux sous vide.

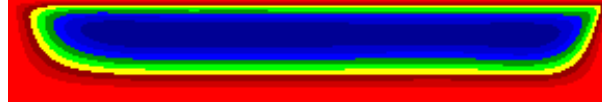
Energie totale

En utilisant le tableau 3.2, la relation de saut relative à l'énergie totale (3.50) exprime d'une certaine façon l'équilibre thermique de l'interface,

$$\dot{m}_1 \left(u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) + \dot{m}_2 \left(u_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1) \cdot \mathbf{v}_1 - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = 0. \quad (3.113)$$



(a) Isothermes



(b) Fonction de courant

Figure 3.10: Simulation numérique la convection Marangoni, d'après Polezhaev & Ermakov (1992). La paroi chaude est à gauche et la paroi froide est à droite.

Inégalité entropique

En utilisant le tableau 3.2, la relation de saut relative à l'entropie (3.50) exprime d'une certaine l'évolution thermodynamique de l'interface,

$$-\dot{m}_1 s_1 - \dot{m}_2 s_2 - \frac{1}{T_1} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \frac{1}{T_2} \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \Delta_i \geq 0. \quad (3.114)$$

3.4.4 Relations de saut secondaires

L'intérêt de disposer de relations de saut secondaires est double. Ces dernières permettent de déterminer le saut d'enthalpie à l'interface ce qui est une relation plus commode que le saut d'énergie totale (3.113) pour les calculs pratiques. En effet, les tables thermodynamiques (voir annexe C) fournissent en général l'enthalpie d'un liquide et de sa vapeur pour une pression et une température donnée.

Le second intérêt est plus fondamental. Il consiste à identifier les sources d'entropie interfaciale, c'est-à-dire les sources d'irréversibilité liées au changement de phase. Ce problème a été abondamment traité par exemple par Delhay (1974) et Ishii (1975, ch. 2). Ces deux approches diffèrent légèrement et ne permettent pas de constituer un ensemble de relations fermées dans le cas général. Chaque auteur doit introduire des propriétés matérielles aux interfaces, comme une masse, un tenseur des tensions, une énergie interne et une entropie. Il faut ensuite considérer des équations d'état pour l'interface. Ces relations définissent une température d'interface. L'objectif de cette procédure est de justifier des conditions aux limites que l'on suppose ordinairement sur les interfaces comme la continuité de la température (3.119) et de la vitesse tangente (3.117) et la relation entre la température des phases et la température de saturation.

La nature ouverte des relations aux interfaces est facile à comprendre. Supposons que l'on dispose d'un modèle très fin permettant de décrire chacune des phases et la zone interfaciale considérée maintenant comme une zone de transition progressive. Supposons que loin de l'interface ce modèle fin dégénère sur les équations phasiques (3.49). Il serait alors possible de déterminer, comme le fait par exemple Whitham (1974, p. 187) en écoulement monophasique compressible, le saut d'entropie à l'interface. Il est aussi possible de définir des grandeurs interfaciales. Ces grandeurs sont définies par intégration sur toute l'épaisseur de la zone interfaciale ce qui n'est autre chose qu'une prise de moyenne.

Dans un modèle à interfaces discontinues, la structure fine de l'interface n'est pas décrite et elle a été perdue par la schématisation retenue. Il en résulte un problème de fermeture pour les quantités interfaciales.

Bilan d'enthalpie totale

En partant du saut d'énergie totale à l'interface (3.113) et en introduisant la définition de l'enthalpie (3.69) et en séparant la partie visqueuse du tenseur des contraintes on obtient.

$$\begin{aligned} \dot{m}_1(i_1 + \frac{1}{2}v_1^2) + \dot{m}_2(i_2 + \frac{1}{2}v_2^2) + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{V}_1) \cdot \mathbf{v}_1 - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{V}_2) \cdot \mathbf{v}_2 \\ = -(p_1 \mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_1 + p_2 \mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_2). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Dans la plupart des circonstances, la variation d'énergie cinétique est négligeable devant la variation d'enthalpie. Une évaporation intense donnant une vitesse de vapeur de 100 m/s correspond, à une pression de 1 bar, à une variation d'énergie cinétique de 5kJ/kg environ alors que la variation d'enthalpie correspondante, $i_V - i_L$ est de 2,26 MJ/kg environ. La variation d'enthalpie est 450 fois environ plus grande que la variation d'énergie cinétique. Ce rapport augmente encore avec l'augmentation de la pression, pour la même valeur de \dot{m} . Si en revanche l'évaporation a lieu sous vide, on peut atteindre la vitesse du son et l'interface n'est plus à l'équilibre thermodynamique.

Considérant que le saut de pression à l'interface est faible, on peut également négliger le membre de droite de (3.115) dans tous les cas. Dans ces conditions on obtient la relation suivante,

$$\dot{m}_1 i_1 + \dot{m}_2 i_2 + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \approx 0 \quad (3.116)$$

Conditions approchées d'équilibre thermodynamique de l'interface

L'analyse des sources d'entropie interfaciales permet dans certaines conditions de justifier les hypothèses suivantes.

- Adhérence des fluides à l'interface,
- Equilibre thermodynamique à l'interface

Dans tous les cas pratiques où la vitesse de la vapeur est faible devant la vitesse du son, ces hypothèses sont raisonnables. Elles se traduisent par les relations suivantes.

$$\mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} \quad (3.117)$$

$$T_V = T_{sat}(p_V) \quad (3.118)$$

$$T_L = T_V \quad (3.119)$$

$$\rho_V = \rho_{sat}(p_V) \quad (3.120)$$

$$\rho_L = \rho(p_L, T_L) \quad (3.121)$$

$$h_V = h_{sat}(p_V) \quad (3.122)$$

$$h_L = h(p_L, T_L) \quad (3.123)$$

où $\mathbf{v}_{tk} = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k$ est la composante tangentielle de la vitesse de chaque phase à l'interface et l'indice $_{sat}$ est relatif aux conditions de saturation. Des tables des propriétés thermodynamique de l'eau sont données à l'annexe C.

3.4.5 Exemples d'utilisation des relations de saut

Evaporation sur une surface plane

Lors de la discussion du bilan de masse à l'interface, nous avons évoqué simplement le cas d'un liquide contenu dans un récipient et analysé le sens de variation des vitesses en fonction du signe du changement de phase (paragraphe 3.4.3).

En considérant la figure 3.5 (page 32), supposons maintenant que le liquide soit chauffé par le dessous du récipient avec une puissance thermique P de 1kW. Supposons par ailleurs que le récipient soit cylindrique (10 cm de diamètre) et qu'il contienne une hauteur d'eau, h , de 10 cm. Pour simplifier supposons que le flux de chaleur soit uniquement transmis à travers le liquide par conduction. La densité de flux apportée au récipient et transmise au liquide est donc,

$$q_L = \frac{P}{S} \quad (3.124)$$

où S est l'aire du fond du récipient. Si les parois latérales du récipient sont isolantes et que le flux est distribué de façon uniforme, le flux apporté au fond du récipient est intégralement transmis à l'interface. En supposant que dans la vapeur la température est à peu près uniforme, on peut négliger le flux de chaleur à l'interface du côté vapeur et le bilan d'enthalpie à l'interface donne,

$$\dot{m}_1(h_1 - h_2) + q_L = 0 \quad (3.125)$$

ce qui permet de déterminer l'intensité du changement de phase à l'interface,

$$\dot{m}_1 = \frac{q_L}{h_2 - h_1} = \frac{P}{S(h_2 - h_1)}. \quad (3.126)$$

En considérant l'interface à la température de saturation pour 1 bar (\approx la pression atmosphérique), on calcule l'enthalpie de changement de phase à 100°C à l'aide des tables (annexe C) et on trouve,

$$q_L = \frac{P}{S} = \frac{1000}{\pi \times (0,1)^2/4} = 12,7 \text{ W/cm}^2 \quad (3.127)$$

$$\dot{m}_1 = \frac{12,7 \cdot 10^4}{(2676 - 419)10^3} = 56,4 \text{ g/m}^2/\text{s} \quad (3.128)$$

Lorsque l'on chauffe, \dot{m}_1 qui représente la densité de flux de masse quittant la phase 1, est positive. Il y a donc évaporation (!). En appliquant la formule (3.85) déduite du bilan de masse à l'interface on peut en déduire la vitesse de l'interface,

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_1 = -\frac{\dot{m}_1}{\rho_1} = -\frac{56,4 \cdot 10^{-3}}{958} = 59 \mu\text{m/s} \approx 3,5 \text{ mm/min} \quad (3.129)$$

Et finalement ce calcul nous permet de calculer le temps au bout duquel l'interface atteint le fond du récipient,

$$t = \frac{h}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_1|} = \frac{0,1}{5,88 \cdot 10^{-6}} \approx 1700 \text{ s} \approx 28 \text{ min} \quad (3.130)$$

Deux commentaires s'imposent. D'une part si l'objet du calcul avait été de déterminer simplement le temps au bout duquel le récipient est vide, on peut penser qu'une solution plus rapide aurait été choisie. En effet. La puissance fournie au récipient sert à vaporiser le liquide. En conséquence un bilan global d'enthalpie donne directement le résultat. Si $M_L = \rho_L V_L$ est

la masse de liquide à vaporiser où V_L est le volume de fluide contenu par le récipient et Pt est l'énergie fournie, on déduit immédiatement le temps nécessaire par,

$$Pt = M_L(H_V - H_L) \Rightarrow t = \frac{V_L \rho_L (H_V - H_L)}{P} \quad (3.131)$$

où on a négligé l'énergie nécessaire pour porter l'eau à la température d'ébullition.

Un second commentaire s'impose sur la représentativité du modèle de l'ébullition dans une casserole que l'on s'est donnée. La conductivité thermique de l'eau à 100°C est également donnée dans les tables (annexe C). On peut en déduire la température du fond du récipient nécessaire à l'application du flux de chaleur par conduction seule,

$$q_L = -k_L \frac{\partial T}{\partial x} = -k_L \frac{T_{sat}(p) - T_F}{h} \Rightarrow \quad (3.132)$$

$$T_F = T_{sat}(p) + \frac{q_L h}{k_L} = 100 + \frac{12,7 \cdot 10^4 \times 0,1}{0,68} \approx 18800 \text{ K}, \quad (3.133)$$

où T_F est la température du fond du récipient. Etonnant n'est-ce-pas ! La situation de chauffage par le dessous est en effet instable et dès que les forces de flottabilité sont suffisamment intenses pour vaincre la résistance au mouvement liée à la viscosité et la convection naturelle s'organise. Le rapport de ces deux forces est mesurée par le nombre de Rayleigh. Dès que ce dernier dépasse une valeur critique de quelques milliers l'équilibre instable (chaud donc léger dessous et lourd dessus) est rompu et on peut estimer le transfert de chaleur par la corrélation proposée par Delhaye (19XX),

$$Nu_L = \begin{cases} 0,54 Ra_L^{1/4} & 10^4 < Ra_L < 10^7 \\ 0,15 Ra_L^{1/3} & 10^7 < Ra_L < 10^{11} \end{cases} \quad (3.134)$$

où le nombre de Rayleigh est défini par,

$$Ra_L = \frac{g \beta_L \Delta T_{sat} L^3}{\nu_L \alpha_L} \quad (3.135)$$

et où l'échelle de longueur est définie par $L = A/P$ avec A l'aire de la partie chauffante et P son périmètre. Pour un récipient cylindrique, on a $L = D/4$. Les propriétés physiques issues des tables sont nécessaires. En toute rigueur, il faudrait calculer ces propriétés à la température de film $(T_F + T_{sat})/2$, nous commencerons par estimer Ra_L à la température de saturation. Les tables fournissent

- viscosité du liquide : $\mu_L = 282 \cdot 10^{-6} \text{ Pa s}$
- conductivité thermique du liquide : $k_L = 679 \cdot 10^{-3} \text{ W/m/K}$
- masse volumique du liquide : $\rho_L = 958,4 \text{ kg/m}^3$
- chaleur spécifique à pression constante du liquide : $C_{PL} = 4217 \text{ J/kg/K}$
- coefficient d'expansion thermique du liquide : $\beta_L = 0,00075 \text{ K}^{-1}$

dont on déduit,

- viscosité cinématique du liquide : $\nu_L = 0,294 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- diffusivité thermique du liquide : $\alpha_L = 0,168 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- échelle de longueur du problème : $L = 0,025 \text{ m}$

Il est clair que le calcul du nombre de Rayleigh nécessite la connaissance de la surchauffe de la paroi qui n'est connue que lorsque le nombre de Nusselt est donné. On rappelle que le nombre de Nusselt est défini par,

$$Nu_L = \frac{q_L L}{k_L \Delta T_{sat}}. \quad (3.136)$$

Un calcul itératif est donc nécessaire

$$\Delta T_{sat} = 60,1^\circ\text{C}, \quad Nu_L = 77,8. \quad (3.137)$$

Le nombre de Rayleigh est égal à $1,4 \cdot 10^8$ ce qui correspond au régime turbulent. Cette surchauffe de la paroi est très importante et comme on le verra plus loin, elle est largement nécessaire pour déclencher l'ébullition nucléée en paroi qui se traduit par des valeurs du coefficient de transfert de chaleur bien supérieurs à ceux de la convection naturelle et en conséquence prédit une température de paroi beaucoup plus proche de la température de saturation.

Ce calcul présente toutefois un intérêt supplémentaire car il permet d'interpréter la phase initiale de chauffage où l'eau est encore froide dans le récipient. On observe que pour une température moyenne de l'ordre de 40°C , le fond du récipient atteint la température de saturation. Lorsque la température moyenne s'élève d'une dizaine de $^\circ\text{C}$, la température de paroi en fait autant et la surchauffe est largement suffisante pour faire apparaître les premières bulles. Ces bulles se développent sur le fond et certaines se détachent. Dès qu'elles s'élèvent elle rencontrent de l'eau froide et la vapeur se condense très rapidement. Ce phénomène est responsable du chant des bouilloires.

Croissance d'une petite bulle : équation de Rayleigh-Plesset

Le problème est discuté par Delhayé dans Bergles *et al.* (1981, p. 56) et des applications numériques selon la méthode développée par Zwick & Plesset (1954) sont données par Lemonnier (2001).

3.5 Les équations instantanées moyennées sur la section d'une conduite

Les écoulements dans les conduites possèdent une direction privilégiée et les détails des profils de vitesse et de température ne sont pas de première importance pour la résolution des problèmes pratiques comme la détermination des pertes de pression ou des transferts de chaleur en convection forcée. Des équations simplifiées sont donc utiles pour modéliser des conduites dans l'esprit de ce qui est fait en hydraulique.

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment s'établissent les équations aux valeurs moyennes dans la section. L'établissement repose sur l'introduction d'un opérateur de moyenne spatial et de l'utilisation de formes limites des théorèmes de Gauss et de la règle de Leibniz pour une section de conduite. L'opération de moyenne fait disparaître la structure de l'écoulement et on discutera plus loin du problème de fermeture qui en résulte. Ce paragraphe décrit les travaux de Delhaye & Achard (1976) sur ce sujet.

3.5.1 Définition des opérateurs de moyenne spatiaux

Les opérateurs de moyenne utilisés en écoulement diphasique ont été présentés au chapitre précédent. Pour établir les équations aux valeurs moyennes, on utilise principalement deux types de moyennes sur la section. La première est la moyenne ordinaire sur la section. Pour toute grandeur f on note,

$$\langle f \rangle_2 = \frac{1}{A} \int_A f \, dS, \quad (3.138)$$

où A représente l'aire de la section droite de la conduite et l'indice 2 indique la dimension du domaine d'intégration. On définit également la moyenne spatiale phasique par,

$$\langle f \rangle_{k2} = \frac{1}{A_k} \int_{A_k} f \, dS, \quad (3.139)$$

où l'indice k est relatif à la phase considérée. Pour cette dernière moyenne, le domaine d'intégration est limité à la fraction de la section de conduite occupée par la phase k considérée.

3.5.2 Les outils mathématiques

Les équations aux valeurs moyennes seront établies en intégrant sur la section occupée par la phase k les équations locales démontrées précédemment (3.49). Cette intégration fera apparaître des intégrales de termes comportant des dérivées par rapport au temps ou à l'espace. Nous devons inverser l'ordre de l'intégration et de la dérivation pour obtenir des termes relatifs aux grandeurs moyennes. Une règle permettant cette transformation est nécessaire.

Pour les termes temporels, la forme limite de la règle de Leibniz établie au paragraphe A.5 permet de transformer les termes de la forme,

$$\int_{A_k} \frac{\partial f}{\partial t} \, dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_k} f \, dS + \dots = \frac{\partial}{\partial t} A_k \langle f \rangle_{k2} + \dots \quad (3.140)$$

où les points de suspension recouvrent des termes dont la forme particulière dépend du détail de la définition de la section de conduite considérée.

Pour une conduite de forme quelconque (figure 3.11) dont la section occupée par la phase k , $A_k(z, t)$, est placée à la cote z (figure 3.11) et dont la forme dépend du temps, la forme limite de la règle de Leibniz s'énonce, pour toute quantité f ,

$$\frac{d}{dt} \int_{A_k(z,t)} f \, dV = \int_{A_k(z,t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, dS + \int_{C(z,t)} f \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_{kC} \cdot \mathbf{n}_k} \, dl + \int_{C_k(z,t)} f \frac{\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_{kC} \cdot \mathbf{n}_k} \, dl, \quad (3.141)$$

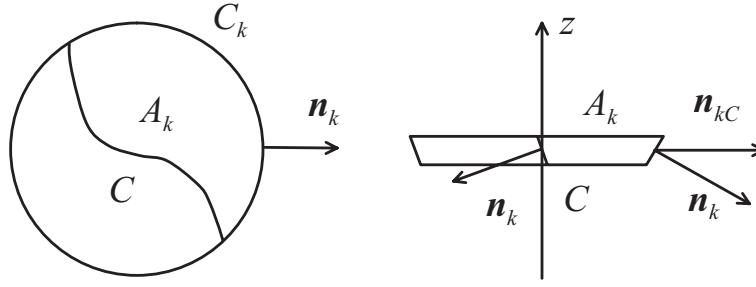


Figure 3.11: Schématisation d'une section de conduite qui est le siège d'un écoulement diphasique. C est l'intersection de l'interface avec le plan de coupe, C_k est l'intersection de la fraction de la conduite mouillée par la phase k et A_k est la fraction de la section de la conduite occupée par la phase k .

où $C_k(z, t)$ représente l'intersection de la conduite mouillée par la phase k par le plan de cote z , $C(z, t)$ est l'intersection de l'interface par le plan de cote z , \mathbf{n}_k est la normale unitaire extérieure à la phase k , \mathbf{n}_{kC} est la normale unitaire à la courbe plane C ou C_k , située dans le plan de cote z et dirigée vers l'extérieur de la phase k et $\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n}$, et $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}$ sont respectivement la vitesse de déplacement géométrique de la conduite et de l'interface.

L'intégration sur la section fait également apparaître des intégrales de dérivées spatiales. Une autre règle permettant d'intervertir le sens des opérations d'intégration et de dérivation est nécessaire. La forme limite du théorème de Gauss (voir paragraphe A.4) permet cette opération,

$$\int_{A_k} \nabla \cdot \mathbf{B} dS = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z dS + \dots = \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z \rangle_{k_2} + \dots \quad (3.142)$$

où \mathbf{e}_z et le vecteur unitaire orientant l'axe de la conduite (z) et les points de suspension recouvrent des termes dont la forme particulière dépend également du détail de la définition de la section de conduite considérée. Pour la conduite représentée à la figure 3.11, la forme limite du théorème de Gauss s'énonce, pour tout vecteur \mathbf{B} ou tenseur \mathbb{M} ,

$$\int_{A_k(z, t)} \nabla \cdot \mathbf{B} dS = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z, t)} B_z dS + \int_{C(z, t)} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_{kC} \cdot \mathbf{n}_k} dl + \int_{C_k(z, t)} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_{kC} \cdot \mathbf{n}_k} dl. \quad (3.143)$$

où B_z est la composante du vecteur \mathbf{B} selon z ($B_z = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z$).

3.5.3 Equations instantanées moyennées dans la section

Munis des définitions des opérateurs de moyenne et des formes limites du théorème de Gauss et de la règle de Leibniz, l'établissement des équations aux valeurs moyennes débute en intégrant le bilan local phasique généralisé (3.49) sur la fraction de la section de la conduite occupée par la phase k ,

$$\int_{A_k(z, t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \psi_k) + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot \mathbb{J}_k - \rho_k \phi_k \right) dS = 0, \quad (3.144)$$

où la signification des grandeurs ψ_k , ϕ_k et \mathbb{J}_k est donnée au tableau (3.2). En utilisant les formes limites des théorèmes de Gauss et de la règle de Leibniz, on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k \psi_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k \psi_k w_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{J}_k \rangle_2 - A_k \langle \rho_k \phi_k \rangle_2 \\ = - \int_{C(z, t)} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} - \int_{C_k(z, t)} (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (3.145)$$

où w_k est la composante axiale de la vitesse ($w_k = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_z$) et on rappelle que la densité de flux de masse à l'interface quittant la phase k , \dot{m}_k , est définie par (3.48). Pour établir cette équation on a supposé que la paroi de la conduite est imperméable,

$$\dot{m}_k = 0, \text{ sur } C_k \quad (3.146)$$

Bilan de masse moyenné sur la section

Le bilan de masse instantané moyenné sur la section s'écrit à partir de (3.145) et du tableau (3.2),

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k \mathbf{v}_k >_2 = - \int_{C(z,t)} \frac{\dot{m}_k dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \quad (3.147)$$

où le membre de droite représente le taux de production de la phase k par unité de longueur de conduite (kg/s/m). Dans un système comprenant un liquide et sa vapeur ce terme représente l'intensité du changement de phase. En absence de changement de phase ce terme est nul.

Bilan de quantité de mouvement moyenné sur la section

Le bilan de quantité de mouvement linéaire instantané moyenné sur la section s'écrit à partir de (3.145) et du tableau (3.2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k \mathbf{v}_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k w_k \mathbf{v}_k >_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{T}_k >_2 - A_k < \rho_k \mathbf{F}_k >_2 \\ = - \int_{C(z,t)} (\dot{m}_k \mathbf{v}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k(z,t)} (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (3.148)$$

où le membre de droite est composé de deux termes. Le premier représente l'apport de quantité de mouvement lié au changement de phase et la résultante des contraintes appliquées sur la phase k à l'interface tandis que le second représente les efforts appliqués à la phase k par la fraction de la paroi qu'elle mouille.

Le bilan de quantité de mouvement est une relation vectorielle. Le mouvement dans la direction de la conduite est celui qui importe. Pour obtenir l'équation qui le régit, on projette (3.148) sur l'axe des z . Par la même occasion, on sépare le tenseur des contraintes en partie visqueuse et pression selon (3.53). Les termes de pression moyenne sur la section, sur la paroi et l'interface peuvent être regroupés. Pour cela on utilise une identité déduite du théorème de Gauss (3.143) appliqué au vecteur $\mathbf{B} = p_k \mathbf{e}_z$,

$$A_k < \frac{\partial p_k}{\partial z} >_2 = \frac{\partial}{\partial z} A_k < p_k >_2 + \int_{C(z,t)} p_k \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_{kC} \cdot \mathbf{n}_k} dl + \int_{C_k(z,t)} p_k \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_{kC} \cdot \mathbf{n}_k} dl. \quad (3.149)$$

Le bilan de quantité de mouvement moyenné sur la section et projeté sur l'axe de la conduite s'énonce,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k w_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k w_k^2 >_2 \\ + A_k < \frac{\partial p_k}{\partial z} >_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{e}_z >_2 - A_k < \rho_k \mathbf{F}_k >_2 \\ = - \int_{C(z,t)} (\dot{m}_k w_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{e}_z) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k(z,t)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{e}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (3.150)$$

Bilan d'énergie totale moyenné sur la section

Le bilan d'énergie totale instantané moyenné sur la section s'écrit à partir de (3.145) et du tableau (3.2). En introduisant l'enthalpie (3.69) et en séparant le tenseur des contraintes en

partie liée aux effets de pression et en partie visqueuse (3.53), on obtient,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k \left(i_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2 - \frac{\partial}{\partial t} A_k < p_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k w_k \left(i_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2 \\
+ \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{q}_k >_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{v}_k >_2 - A_k < \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k >_2 \\
= - \int_{C(z,t)} \left(\dot{m}_k \left(i_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{q}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k \right) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \\
- \int_{C_k(z,t)} (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{q}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \quad (3.151)
\end{aligned}$$

où le membre de droite est composé d'un terme relatif à l'interface et d'un terme relatif à la fraction de la paroi mouillée par la phase k . Le premier terme représente l'apport d'énergie totale lié au changement de phase, additionné de celui relatif au flux de chaleur et à la puissance des contraintes appliquées à l'interface. Le second représente l'apport d'énergie lié au flux de chaleur pariétal et à la puissance de contraintes appliquées par la paroi sur le fluide. Lorsque la paroi du tube est rigide et indéformable ce dernier terme est identiquement nul ($\mathbf{v}_k = 0$ à la paroi).

Le terme de puissance des efforts lié à la déformation de la conduite s'exprime par exemple lors des coups de bélier dans les conduites où le passage des ondes de pression comprime le milieu diphasique et déforme la conduite. Dans ce cas, ce terme représente une partie de l'échange d'énergie mécanique entre l'écoulement et la conduite. En appliquant la règle de Leibniz (3.141) à la fonction p_k , on obtient l'identité suivante,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k < p_k > = A_k < \frac{\partial p_k}{\partial t} > + \int_{C(z,t)} \frac{p_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_{kC} \cdot \mathbf{n}_k} dC + \int_{C_k(z,t)} \frac{p_k \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_{kC} \cdot \mathbf{n}_k} dC. \quad (3.152)$$

En additionnant cette identité à l'équation d'énergie (3.151), on obtient une forme de l'équation d'énergie où le travail des forces de pression n'apparaît plus explicitement,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k \left(i_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2 - A_k < \frac{\partial p_k}{\partial t} >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k w_k \left(i_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2 \\
+ \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{q}_k >_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{v}_k >_2 - A_k < \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k >_2 \\
= - \int_{C(z,t)} \left(\dot{m}_k \left(i_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{q}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{v}_k \right) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \\
- \int_{C_k(z,t)} (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{q}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{v}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}. \quad (3.153)
\end{aligned}$$

3.6 Les équations locales moyennées sur un intervalle de temps

La simulation des écoulements diphasiques tridimensionnels nécessite d'établir des équations aux valeurs moyennes temporelles des vitesses des pressions et des enthalpies. Cette procédure de moyenne temporelle qui ressemble aux moyennes de Reynolds pour les écoulements turbulents nécessite d'introduire deux opérateurs de moyenne. L'objet de ce paragraphe est de montrer comment s'établissent les équations locales utilisées par les outils de CFD. Ce paragraphe décrit les travaux de Delhay & Achard (1976) sur ce sujet.

3.6.1 Définition des opérateurs de moyenne

Les opérateurs de moyenne temporels ont également été introduits au chapitre précédent. Une variable relative à une phase n'est définie, en principe, qu'aux instants où la phase considérée

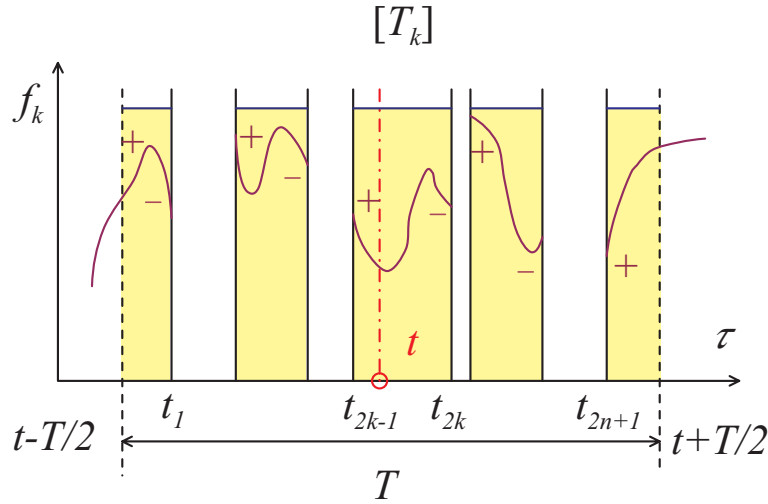


Figure 3.12: Représentation d'une fonction définie sur un intervalle de temps. T est le temps d'intégration de la fonction $f(\mathbf{x}, t)$, $[T]$ est l'intervalle de temps de largeur T centré sur le temps de prise de moyenne, t , $[T_k]$ est l'ensemble des intervalles de temps où la phase k est présente au point considéré et on note t_{2k} les instants où le point considéré entre dans la phase k et t_{2k+1} les instants où il en sort.

est présente au point considéré. Les grandeurs diphasiques sont donc des fonctions définies sur des intervalles de temps (voir figure 3.12). Soit $[T]$, l'intervalle de temps de durée T centré sur l'instant t , on définit la moyenne temporelle d'une grandeur f sur l'intervalle de temps $[T]$ par,

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_{[T]} f dt. \quad (3.154)$$

Soit $[T_k]$, l'ensemble des intervalles de temps inclus dans $[T]$ où la phase k est présente au point \mathbf{x} , on définit la moyenne temporelle de phase par,

$$\bar{f}^X = \frac{1}{T_k} \int_{[T_k]} f dt. \quad (3.155)$$

3.6.2 Les outils mathématiques

Les équations aux valeurs moyennes sont établies en intégrant sur l'intervalle de temps $[T_k]$ les équations locales pour chaque phase (3.33). Cette intégration fait apparaître des intégrales de termes comportant des dérivées par rapport au temps ou à l'espace. Comme lors de l'établissement des équations moyennées dans la section, il faudra inverser l'ordre de l'intégration et de la dérivation pour obtenir des termes relatifs aux grandeurs moyennes. Deux autres règles permettant ces transformations sont nécessaires.

Pour les termes temporels, la forme limite de la règle de Leibniz établie au paragraphe A.6 permet de transformer les termes de la forme,

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = \frac{\partial}{\partial t} \int_{[T_k]} f_k dt + \dots = \frac{\partial}{\partial t} T_k \bar{f}_k^X + \dots. \quad (3.156)$$

Pour une grandeur relative à la phase k (voir figure 3.12) définie sur un ensemble d'intervalles de temps $[T_k]$ inclus dans l'intervalle de prise de moyenne $[T]$, de durée T , centrée sur l'instant t , la forme limite de la règle de Leibniz s'énonce,

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = \frac{\partial}{\partial t} \int_{[T_k]} f_k dt - \sum_{\text{disc.} \in [T]} f_k \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \quad (3.157)$$

où la sommation est relative à tous les instants appartenant à $[T]$ où le point considéré entre ou sort de la phase k .

L'intégration temporelle fait également apparaître des intégrales de dérivées spatiales. Une autre règle permettant de changer l'ordre des opérations d'intégration et de dérivation est nécessaire. La forme limite du théorème de Gauss (voir paragraphe A.7) permet cette opération,

$$\int_{[T_k]} \nabla \cdot \mathbf{B}_k dt = \nabla \cdot \int_{[T_k]} \mathbf{B}_k dt + \dots = \alpha_k T \nabla \cdot \overline{\mathbf{B}_k}^X + \dots \quad (3.158)$$

où on rappelle que le taux de présence local $\alpha_k = T_k/T$. Pour tout vecteur \mathbf{B}_k défini et différentiable sur un ensemble d'intervalles de temps $[T_k]$ inclus dans l'intervalle de prise de moyenne $[T]$, de durée T , centré sur l'instant t , la forme limite du théorème de Gauss s'énonce,

$$\int_{[T_k]} \nabla \cdot \mathbf{B}_k dt = \nabla \cdot \int_{[T_k]} \mathbf{B}_k dt + \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \quad (3.159)$$

où, comme pour la forme limite de la règle de Leibniz, la sommation est relative à tous les instants appartenant à $[T]$ où le point considéré \mathbf{x} entre ou sort de la phase k .

3.6.3 Equations locales moyennées sur un intervalle de temps

l'établissement des équations locales moyennées en temps débute par l'intégration sur le temps $[T_k]$, l'ensemble des intervalles de temps où la phase k est présente pendant la période d'intégration $[T]$, des équations locales (3.49) où l'on rappelle que la signification des différentes grandeurs est indiquée au tableau 3.2,

$$\int_{[T_k]} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \psi_k) + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot \mathbb{J}_k - \rho_k \phi_k \right) dt = 0. \quad (3.160)$$

En appliquant la règle de Leibniz (3.157) au terme comportant la dérivée temporelle et le théorème de Gauss (3.159) aux deux intégrales de la divergence, on obtient en introduisant la définition de la moyenne temporelle (3.155),

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\alpha_k \rho_k \psi_k}^X + \nabla \cdot \overline{\alpha_k \rho_k \psi_k \mathbf{v}_k}^X + \nabla \cdot \overline{\alpha_k \mathbb{J}_k}^X - \overline{\alpha_k \rho_k \phi_k}^X = -\frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \quad (3.161)$$

Delhayé souligne (Bergles *et al.*, 1981, chap. 2) que la prise de moyenne en temps simple induit un comportement singulier du terme $\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho_k \psi_k}^X$. En effet ce dernier n'est pas continu en raison de la nature discontinue du signal : les variables moyennées sont seulement de classe C_0 et leur dérivées temporelles possèdent des points de discontinuité en t_l . Pour pallier cette difficulté on peut soit introduire une seconde opération de moyenne avec le même opérateur où introduire une fonction de pondération bien choisie de support temporel $[T_k]$. Les détails de ces opérations et l'analyse de leurs conséquences sur la modélisation sont donnés par Delhayé & Achard (1976).

Bilan de masse local moyenné sur un intervalle de temps

Le bilan de masse se déduit de l'équation générale (3.161) et du tableau 3.2,

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\alpha_k \rho_k}^X + \nabla \cdot \overline{\alpha_k \rho_k \mathbf{v}_k}^X = -\frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \quad (3.162)$$

où le membre de droite représente le taux de changement de phase local, c'est-à-dire le taux de production local de la phase k (en $\text{kg}/\text{m}^2/\text{s}$).

Bilan de quantité de mouvement local moyenné sur un intervalle de temps

Le bilan de quantité de mouvement se déduit de l'équation générale (3.161) et du tableau 3.2. En séparant le tenseur des contraintes en partie visqueuse et contribution de la pression on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k}^X + \nabla \cdot \alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k}^X + \nabla \alpha_k \overline{p_k}^X - \nabla \cdot \alpha_k \overline{\mathbb{V}_k}^X - \alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{F}_k}^X \\ = -\frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k \mathbf{v}_k - \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \end{aligned} \quad (3.163)$$

où le membre de droite représente d'une part l'apport de quantité de mouvement lié changement de phase et l'action cumulée sur l'intervalle de temps $[T]$ des efforts appliqués aux interfaces sur la phase k . En appliquant le théorème de Gauss (3.158) au tenseur $p_k \mathbb{I}$ et en divisant par T , on obtient l'identité suivante,

$$\alpha_k \nabla \overline{p_k}^X = \nabla \alpha_k \overline{p_k}^X + \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{p_k \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}. \quad (3.164)$$

En substituant cette relation dans le bilan de quantité de mouvement, on obtient une autre forme du bilan de quantité de mouvement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k}^X + \nabla \cdot \alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k}^X + \alpha_k \nabla \overline{p_k}^X - \nabla \cdot \alpha_k \overline{\mathbb{V}_k}^X - \alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{F}_k}^X \\ = -\frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k \mathbf{v}_k - \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \end{aligned} \quad (3.165)$$

où n'apparaît dans le second membre que la contribution de la partie visqueuse du tenseur des contraintes

Bilan d'énergie totale local moyenné sur un intervalle de temps

Le bilan d'énergie totale se déduit de l'équation générale (3.161) et du tableau 3.2,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\alpha_k \rho_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right)}^X + \nabla \cdot \left(\overline{\alpha_k \rho_k \mathbf{v}_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right)}^X \right) \\ - \nabla \cdot \alpha_k \overline{\mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k}^X + \nabla \cdot \alpha_k \overline{\mathbf{q}_k}^X - \alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k}^X \\ = -\frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \left(\dot{m}_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k \right) \frac{1}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \end{aligned} \quad (3.166)$$

où le membre de droite représente l'apport d'énergie totale à travers de l'interface lié au changement de phase, la contribution du flux de chaleur à l'interface et la puissance des contraintes appliquées à l'interface.

3.6.4 La décomposition de Reynolds

Pour effectuer sans difficulté la séparation entre valeur moyenne et fluctuation il faut définir la fluctuation et que l'opérateur de moyenne satisfasse les conditions dites de Reynolds (Ishii, 1975). On définit la fluctuation comme l'écart à la valeur moyenne,

$$f(t) = \bar{f}(t) + f'(t) \quad (3.167)$$

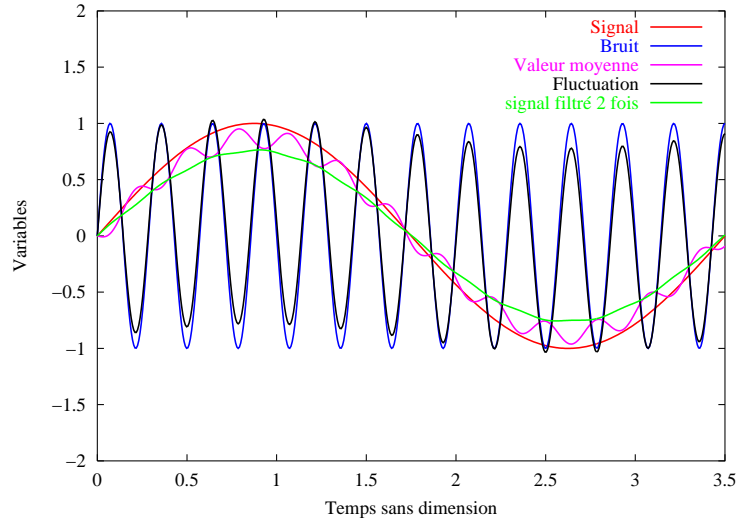


Figure 3.13: Exemple naïf d'application d'un filtre temporel de largeur unité sur le signal défini à l'équation (3.171). L'échelle de temps est T . Le signal a une période égale à $3,5T$ ($n = 3,5$) et le bruit a une fréquence égale à $3,5/T$ ($m = 3,5$).

où \bar{f} est la valeur moyenne de f qui dépend du temps et qui est obtenu par l'application d'un opérateur de moyenne comme (3.154) par exemple et $f'(t)$ est la fluctuation. Les axiomes de Reynolds sont les suivants,

$$\bar{a} = a \quad (3.168)$$

$$\overline{\lambda f + \mu g} = \lambda \bar{f} + \mu \bar{g} \quad (3.169)$$

$$\bar{\bar{f}} = f \quad (3.170)$$

où a , λ et μ sont des constantes et f et g sont des fonctions du temps. Les deux premières propriétés sont pratiquement toujours vérifiées par tous les opérateurs de moyenne classiques qui sont de filtres linéaires. En revanche, l'idempotence (3.170) est plus délicate à vérifier. Elle n'est pas vérifiée en particulier par la moyenne temporelle sur un intervalle de temps $[T]$ (3.154).

Il est simple de vérifier sur un exemple qu'il faut une séparation des échelles de temps significative entre le "signal" que l'on cherche à extraire par l'opération de moyenne et le "bruit" que l'on cherche à confiner dans la fluctuation. Un exemple naïf permet d'illustrer cette difficulté. Choisissons T comme échelle de temps. Soit une variable $f(t)$ composée d'un signal $s(t)$ et d'un bruit $b(t)$. On désire séparer le signal du bruit par l'opération de moyenne temporelle (3.154). Si on choisit par exemple,

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{n}\right) + \sin(2m\pi t) \quad (3.171)$$

où le premier terme représente le signal et le second le bruit. On a,

$$\bar{f}(t) = \frac{n \sin(\pi/n)}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{n}\right) + \frac{\sin(m\pi)}{m\pi} \sin(2m\pi t) \quad (3.172)$$

$$\bar{\bar{f}}(t) = \left(\frac{n \sin(\pi/n)}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi t}{n}\right) + \left(\frac{\sin(m\pi)}{m\pi}\right)^2 \sin(2m\pi t) \quad (3.173)$$

La figure 3.13 montre clairement que le bruit n'est pas entièrement capturé par l'opérateur de moyenne et que le signal filtré comporte une fluctuation importante. Par ailleurs la double moyenne n'est atténuée par rapport au signal original.

Ces considérations sont développées par Delhay & Achard (1976) pour l'opérateur de moyenne phasique (3.155) qui préconise des règles de choix de la largeur du filtre temporel en fonction du contenu fréquentiel du signal et du bruit.

(A suivre...)

3.7 Les équations moyennées en temps et en espace

Les équations moyennées sur la section ont été obtenues au paragraphe 3.5. Certains régimes d'écoulement comme l'écoulement à poches de gaz et à bouchons de liquide sont très variables et, en valeur instantanée, des quantités comme le frottement pariétal fluctue de façon très importante. En effet, ce dernier change de signe en écoulement vertical ascendant entre le passage du bouchon de liquide et le passage de la poche de gaz. L'utilisation d'équations simplement moyennées dans la section nécessiterait de fournir des relations de fermeture qui résolvent temporellement ces détails de l'écoulement. Dans la plupart des applications, on ne souhaite pas décrire avec autant de détail la structure de l'écoulement et seules des valeurs moyennes sur toutes ces structures importent.

Les équations moyennées sur la section peuvent également être moyennées en temps. Il y a deux façons différentes et équivalentes de les obtenir selon l'ordre dans lequel les deux moyennes sont effectuées. En moyennant en temps les équations moyennées sur la section on obtient par application de l'opérateur de moyenne (3.154),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{A_k < \rho_k \psi_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k < \rho_k \psi_k w_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k < \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{J}_k >_2} - \overline{A_k < \rho_k \phi_k >_2} \\ = - \int_{C(z,t)} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} - \int_{C_k(z,t)} (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (3.174)$$

où la signification des différents symboles est donnée au tableau 3.2 (page 26). Toutefois, les équations aux moyennes composites auraient pu être obtenues en appliquant l'opérateur de moyenne spatial sur la section (3.138) aux équations moyennes sur un intervalle de temps (3.161). En appliquant les formes limites du théorème de Gauss et de la règle de Leibniz on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A \llcorner \overline{\alpha_k \rho_k \psi_k}^X \lrcorner_2 + \frac{\partial}{\partial z} A \llcorner \overline{\alpha_k \rho_k \psi_k w_k}^X \lrcorner_2 + \frac{\partial}{\partial z} A \llcorner \overline{\alpha_k \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{J}_k}^X \lrcorner_2 - A \llcorner \overline{\alpha_k \rho_k \phi_k}^X \lrcorner_2 \\ = -A \llcorner \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \lrcorner_2 - \int_{C_1 \cup C_2} \alpha_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k^X \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (3.175)$$

Les équations (3.174) et (3.7) sont équivalentes. Leur membre de gauche est identique en vertu de la commutativité des opérateurs de moyenne que l'on rappelle ici,

$$\overline{R_{k2} < f_k >_2} = \llcorner \alpha_k \overline{f_k}^X \lrcorner_2 = \frac{1}{T} \int_{[T]} dt \frac{1}{A} \int_A f_k X_k dS. \quad (3.176)$$

On montre également que les termes d'interaction à l'interface sont identiques (paragraphe A.8.1),

$$\int_{C(z,t)} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = A \llcorner \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \lrcorner_2. \quad (3.177)$$

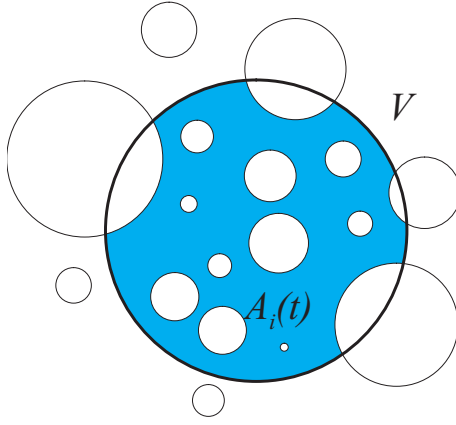


Figure 3.14: Illustration de l'identité définissant l'aire interfaciale (3.182).

Les termes d'interactions à la paroi sont également identiques. La démonstration est analogue à celle de la commutativité des opérateurs de moyenne (3.176),

$$\begin{aligned} \overline{\int_{C_k(z,t)} (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} &= \int_{C_1 \cup C_2} \alpha_k \mathbf{n}_k \cdot \overline{\mathbb{J}_k^X} \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = \\ &= \frac{1}{T} \int_{[T]} dt \int_{C_1 \cup C_2} X_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (3.178)$$

D'une façon plus générale, on montre que les termes d'interaction sur les interfaces commutent également pour les moyennes dans l'espace (paragraphe A.8.2). Ainsi pour tout vecteur \mathbf{B}_k ,

$$\int_V \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T_k]} \frac{\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} dV = \overline{\int_{A_i(t)} \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k dS} \quad (3.179)$$

où A_i représente les interfaces contenues dans le volume d'intégration V . Cette identité possède un cas particulier fondamental qui définit localement l'aire interfaciale. En effet pour $\mathbf{B}_k = \mathbf{n}_k$, on obtient,

$$\int_V \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T_k]} \frac{1}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} dV = \overline{\int_{A_i(t)} dS} = \overline{A_i(t)} \quad (3.180)$$

La figure 3.14 illustre cette identité. L'intégrale volumique de la quantité γ définie par,

$$\gamma = \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T_k]} \frac{1}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}, \quad (3.181)$$

est égale à l'aire des interfaces contenues en moyenne dans le V ,

$$\langle \gamma \rangle_3 = \frac{\overline{A_i(t)}}{V} = \overline{\Gamma_3}. \quad (3.182)$$

De même l'identité des termes d'interaction pour le modèle moyenné dans la section se déduit de l'identité déjà évoquée (3.177). Et dans le cas où $\mathbf{B}_k = \mathbf{n}_k$, on obtient,

$$\langle \gamma \rangle_2 = \frac{\overline{A_i(t)}}{A} = \frac{1}{A} \int_A \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = \overline{\Gamma_2}. \quad (3.183)$$

3.7.1 Problématique de la fermeture des équations moyennées

L'identité (3.180) permet de donner une interprétation claire au terme d'interaction qui intervient dans les équations de bilan moyennées en temps et en espace,

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \overline{\int_{C(z,t)} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} &= \left\langle \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \right\rangle_2 = \\ \overline{\Gamma_2 < \dot{m}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k >_{2i}} &= \left\langle \gamma \overline{\dot{m}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k}^i \right\rangle_2 \end{aligned} \quad (3.184)$$

où les deux moyennes sur les interfaces sont définies par,

$$\Gamma_2 < \dot{m}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k >_{2i} = \frac{1}{A} \int_{C(z,t)} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}, \quad (3.185)$$

et par,

$$\gamma \overline{\dot{m}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k}^i = \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \quad (3.186)$$

L'identité (3.184) fournit une interprétation des termes d'interaction en montrant qu'ils se mettent sous la forme d'une aire interfaciale multipliée par une densité de flux moyennée sur les interfaces. Cette forme générale suggère des relations de fermeture simples en écoulement dispersé à bulles ou à gouttelettes. Cet aspect de la fermeture des modèles moyennés est traité par l'exemple à l'annexe E.

Chapitre 4

Les modèles d'écoulements diphasiques

à venir

Chapitre 5

Les transferts de chaleur en ébullition et condensation

à venir

Annexe A

Le théorème de Gauss et la règle de Leibniz

L'établissement des équations locales de la mécanique des fluides s'appuie sur deux théorèmes mathématiques permettant d'une part, de transformer certaines intégrales de volumes en intégrales de surface et, d'autre part, de dériver les intégrales dont le domaine d'intégration évolue avec le temps. Cette annexe présente ces théorèmes et en propose une démonstration. Les formes limites de ces règles adaptées à l'établissement des équations moyennées dans la section ou sur un intervalle de temps sont également démontrées.

A.1 Flux et divergence

En suivant Aris (1962, p. 53), considérons le volume élémentaire parallélépipédique de diagonale PQ représenté à la figure A.1. Les coordonnées du point P sont x_1, x_2, x_3 dans le repère $O1, O2, O3$ et le parallélépipède a pour dimensions selon chaque direction, dx_1, dx_2, dx_3 . Soit d la plus grande des trois dimensions du volume considéré. Le flux sortant d'un vecteur \mathbf{a} sur le parallélépipède de diagonale PQ a pour expression,

$$\int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (\text{A.1})$$

où \mathbf{a} est un vecteur quelconque, \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à S et orienté vers l'extérieur. Le flux (A.1) comporte une contribution par paire de faces parallèles du parallélépipède. Considérons la contribution des faces orientées selon la direction $O1$ de vecteur de base \mathbf{e}_1 . Sur chaque face de normale $\pm \mathbf{e}_1$, le vecteur \mathbf{a} a pour valeur,

$$\text{Face portant P, } \mathbf{a}(x_1, \xi_2, \xi_3) \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Face portant Q, } \mathbf{a}(x_1 + dx_1, \xi_2, \xi_3) \quad (\text{A.3})$$

où l'on a,

$$\begin{cases} x_2 \leq \xi_2 \leq x_2 + dx_2 \\ x_3 \leq \xi_3 \leq x_3 + dx_3 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La contribution des faces perpendiculaires à \mathbf{e}_1 a pour expression,

$$[a_1(x_1 + dx_1, \xi_2, \xi_3) - a_1(x_1, \xi_2, \xi_3)] dx_2 dx_3, \quad (\text{A.5})$$

où en développant au premier ordre on obtient,

$$\left[a_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 - a_1(x_1, x_2, x_3) + \mathcal{O}(d^2) \right] dx_2 dx_3. \quad (\text{A.6})$$

En conséquence, cette contribution vaut, au premier ordre en d ,

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \mathcal{O}(d^4), \quad (\text{A.7})$$

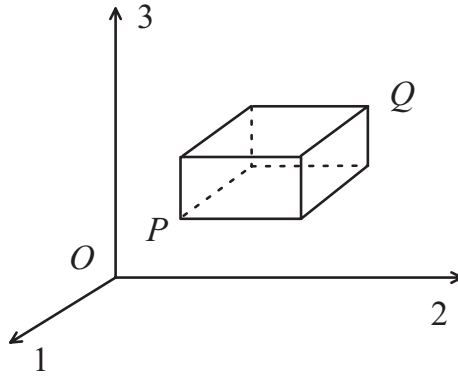


Figure A.1: Repère et volume de contrôle élémentaire pour l'interprétation de la relation entre flux d'un vecteur et sa divergence. Le point P a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) , le point Q a pour coordonnées $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$.

si bien qu'en sommant cette contribution et celle des deux autres paires de faces et en notant que l'élément de volume, $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, on obtient,

$$\frac{1}{dV} \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} + \mathcal{O}(d). \quad (\text{A.8})$$

En passant à la limite pour un volume infinitésimal, on obtient,

$$\lim_{dV \rightarrow 0} \frac{1}{dV} \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \nabla \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{A.9})$$

L'interprétation géométrique de la divergence du vecteur \mathbf{a} est donc le flux sortant du vecteur \mathbf{a} par unité de volume. En coordonnées cartésiennes et en notation indicielle on note la divergence d'un vecteur selon,

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = a_{i,i} \quad (\text{A.10})$$

où l'on somme implicitement sur les indices répétés ($i = 1, 2, 3$) et où la virgule indique la dérivation par rapport aux variables d'espace.

A.2 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est connu sous plusieurs noms comme le rappelle Aris (1962, p. 58) : théorème de la divergence, théorème de Gauss-Ostrogradski. Selon cet auteur, son exposé le plus connu serait dû à Green en 1828 dans son essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme. Il s'énonce pour tout vecteur \mathbf{a} défini dans un volume V , borné par une surface S et différentiable dans ce volume,

$$\boxed{\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS.} \quad (\text{A.11})$$

Aris (1962, p. 58) en propose deux démonstrations. Nous considérerons ici la première. Découpons le volume V en une partition de volumes de dimensions quelconques et de taille maximum d ,

$$V = \bigcup_i \Delta_i, \quad \text{mes}(\Delta_i) \leq d^3. \quad (\text{A.12})$$

L'intégrale de la divergence de \mathbf{a} , s'écrit alors en raison de la relation entre divergence et flux (A.8),

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \sum_i \int_{\Delta_i} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \sum_i \int_{\partial \Delta_i} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS + \mathcal{O}(d^4). \quad (\text{A.13})$$

Puisque l'ensemble des Δ_i forment une partition de V , chaque frontière de ces volumes, $\partial \Delta_i$, appartient à deux volumes Δ_i à l'exception de celles qui sont communes à S . Comme la normale \mathbf{n} est dirigée vers l'extérieur du volume Δ_i , il est clair que les contributions des surfaces communes à deux volumes Δ_i se compensent exactement et que seules contribuent à l'intégrale de surface les surfaces communes à S ,

$$\sum_i \int_{\partial \Delta_i} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{\partial \Delta_i \in S} \int_{\partial \Delta_i} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.14})$$

En passant à la limite, $d \rightarrow 0$, on prouve le théorème de Gauss (A.11). On peut également l'exprimer en explicitant les composantes de \mathbf{a} ,

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} a_j dV = \int_S n_j a_j dS. \quad (\text{A.15})$$

Le théorème de Gauss est également valable pour tout tenseur \mathbb{M} , il s'énonce,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbb{M} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbb{M} dS, \quad (\text{A.16})$$

qui est une égalité vectorielle. En considérant la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\mathbf{n} \cdot \mathbb{M}$,

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbb{M}]_i = n_j M_{ji}, \quad (\text{A.17})$$

et en lui appliquant (A.15), on a,

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} M_{ji} dV = \int_S n_j M_{ji} dS, \quad (\text{A.18})$$

en notant que la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\nabla \cdot \mathbb{M}$ est,

$$[\nabla \cdot \mathbb{M}]_i = \frac{\partial}{\partial x_j} M_{ji}, \quad (\text{A.19})$$

on démontre le théorème de Gauss pour les tenseurs (A.16).

A.3 Règle de Leibniz

La règle de Leibniz est une généralisation en 3D du théorème de la dérivation sous le signe somme d'une intégrale simple dépendante d'un paramètre (Candel, 1990),

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x, \lambda) dx = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda} dx + b'(\lambda)f(b) - a'(\lambda)f(a). \quad (\text{A.20})$$

La règle de Leibniz s'énonce, pour toute fonction f définie sur un volume V , limité par la surface S , et où elle est suffisamment régulière,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S(t)} f \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} dS} \quad (\text{A.21})$$

où \mathbf{v}_S est la vitesse d'un point attaché à la surface S . Lorsque le volume V et la surface S se déplace avec le fluide, on les qualifie de matériels et on les note respectivement V_m et S_m . Ce cas particulier de la règle de Leibniz est connue sous le nom de théorème de transport de Reynolds (Aris, 1962, p. 84),

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S_m(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.22})$$

où \mathbf{v} est la vitesse du fluide. La démonstration de ces deux théorèmes est identique et est donnée par Aris (1962, P. 85). Elle nécessite de définir le mouvement de tout point \mathbf{x} de V à partir de sa position à l'instant $t = 0$, que l'on appellera ξ par,

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(\xi, t). \quad (\text{A.23})$$

On supposera que la transformation (A.23) effectue à chaque instant une bijection de V_0 sur V . On définit la vitesse de déplacement d'un point attaché à V ou à S par,

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t} \right)_{\xi}. \quad (\text{A.24})$$

Si le mouvement considéré est celui du fluide lui-même, on a alors $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Pour toute fonction $f(\mathbf{x}, t)$, on peut changer de variables par la transformation (A.23) et définir,

$$\tilde{f}(\xi, t) = f(\tilde{\mathbf{x}}(\xi, t), t). \quad (\text{A.25})$$

Par le théorème du changement de variables dans une intégrale triple (voir par exemple Aris, 1962, p. 50), on a la relation suivante,

$$\int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \tilde{f}(\xi, t) J dV_0, \quad (\text{A.26})$$

où J est le jacobien de la transformation (A.23). Le jacobien détermine la dilatation de l'élément de volume dans la transformation et on a,

$$dV = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_3} \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = J dV_0, \quad (\text{A.27})$$

où $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ est le produit mixte des trois vecteurs considérés. En dérivant (A.26) par rapport au temps puisque V_0 ne dépend pas du temps, on obtient,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} J + f \frac{\partial J}{\partial t} \right) dV_0, \quad (\text{A.28})$$

où la dérivée partielle de \tilde{f} par rapport au temps représente la dérivée de f calculée en suivant le mouvement de V , qu'on appelle la *dérivée convective* de f , et que l'on note,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (\text{A.29})$$

En introduisant la dérivée convective, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_{V_0} \left(\frac{df}{dt} J + f \frac{dJ}{dt} \right) dV_0 \quad (\text{A.30})$$

Le jacobien défini par (A.27) est le déterminant suivant,

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} \quad (\text{A.31})$$

où l'on a introduit la notation ϵ_{ijk} ,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{si les valeurs de deux indices sont identiques} \\ +1, & \text{si } ijk \text{ représente une permutation circulaire de } 123 \\ -1, & \text{si } ijk \text{ représente une permutation circulaire de } 321 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Pour calculer la dérivée convective du jacobien, il faut déterminer la dérivée convective de chacun de ces éléments,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi_j}, \quad (\text{A.33})$$

puisque t et ξ_j sont des variables indépendantes pour \tilde{x}_i . En considérant le changement de variables (A.23) on a,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \tilde{u}_i(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \tilde{u}_i(\xi(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} \quad (\text{A.34})$$

où l'on rappelle que l'on somme sur l'indice répété, l en l'occurrence. La dérivée convective du jacobien est donnée par dérivation de (A.31),

$$\frac{dJ}{dt} = \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \right) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} \right). \quad (\text{A.35})$$

Considérons le premier terme de la somme. En utilisant (A.34) et en développant la somme sur l'indice l , on a,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \right) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} = \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Seul le premier terme de la somme est non nul, les deux derniers représentant des déterminants comprenant deux lignes identiques. On a donc alors,

$$\epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \right) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} J. \quad (\text{A.37})$$

En pratiquant de manière analogue sur les deux derniers termes de (A.35), on montre que,

$$\frac{dJ}{dt} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) J = J \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (\text{A.38})$$

En substituant dans (A.30) et en appliquant le changement de variable dans l'intégrale triple (A.26) en sens inverse, on obtient finalement,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_{V_0} \left(\frac{df}{dt} J + f J \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV_0 = \int_{V(t)} \left(\frac{df}{dt} + f \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV. \quad (\text{A.39})$$

En utilisant l'expression (A.29) de la dérivée convective, on obtient,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right) dV. \quad (\text{A.40})$$

En appliquant le théorème de Gauss (A.11), on démontre la règle de Leibniz (A.21),

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S(t)} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{A.41})$$

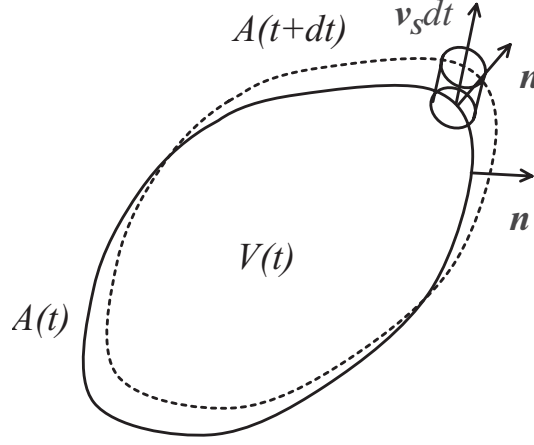


Figure A.2: Schéma permettant l'interprétation géométrique de la règle de Leibniz.

La règle de Leibniz s'interprète facilement de façon géométrique en considérant la définition de la dérivée et en s'aidant de la figure A.2. En effet,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[\int_{V(t+dt)} f(\mathbf{x}, t+dt) dV - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \right]. \quad (\text{A.42})$$

En pratiquant comme Candel (1990), en considérant la différence d'intégrales entre crochets, on a,

$$\begin{aligned} & \int_{V(t+dt)} f(\mathbf{x}, t+dt) dV - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t+dt) dV = \\ & \int_{V(t+dt)} f(\mathbf{x}, t+dt) dV - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t+dt) dV + \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t+dt) dV - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

En considérant les deux premières intégrales, on a

$$\int_{V(t+dt)} f(\mathbf{x}, t+dt) dV - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t+dt) dV = \int_{V(t+dt)-V(t)} (f(\mathbf{x}, t+dt)) dV. \quad (\text{A.44})$$

Sur le domaine $V(t+dt) - V(t)$, (voir figure A.2) en introduisant, λ , la coordonnée dans la direction du vecteur unitaire \mathbf{e}_λ , porté par \mathbf{v}_S et en considérant alors que l'élément de volume $dV = \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{n} d\lambda dS$, on a,

$$\begin{aligned} & \int_{V(t+dt)-V(t)} (f(\mathbf{x}, t+dt)) dV = \int_{S(t)} dS \int_0^{v_s dt} f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_\lambda, t+dt) \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{n} d\lambda = \\ & \int_{S(t)} dS \int_0^1 f(\mathbf{x} + \mu \mathbf{v}_S dt, t+dt) \mathbf{v}_S dt \cdot \mathbf{n} d\mu = \int_{S(t)} dS \int_0^1 (f(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(dt)) \mathbf{v}_S dt \cdot \mathbf{n} d\mu = \\ & \int_0^1 d\mu dt \int_{S(t)} (f(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(dt)) \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} dS = dt \int_{S(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} dS + \mathcal{O}(dt^2) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

où l'on a introduit $\mu = \lambda v_s dt$ et développé $f(\mathbf{x} + \mu \mathbf{v}_S dt, t+dt)$ à l'ordre 0 en dt . En conséquence,

$$\int_{V(t+dt)} f(\mathbf{x}, t+dt) dV - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t+dt) dV = dt \int_{S(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} dS + \mathcal{O}(dt^2). \quad (\text{A.46})$$

En considérant les deux dernières intégrales de (A.43), on obtient en développant au premier ordre en temps,

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t + dt) dV - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \\ \int_{V(t)} \left(f(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dt + \mathcal{O}(dt^2) - f(\mathbf{x}, t) \right) dV = dt \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV + \mathcal{O}(dt^2). \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

En substituant (A.46) et (A.47) dans (A.43) on obtient finalement,

$$\int_{V(t+dt)} f(\mathbf{x}, t + dt) dV - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = dt \int_{S(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} dS + dt \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV + \mathcal{O}(dt^2), \quad (\text{A.48})$$

d'où l'on déduit la règle de Leibniz (A.21) en passant à la limite $dt \rightarrow 0$ dans (A.42)

A.4 Forme limite du théorème de Gauss pour une section de conduite

L'établissement des équations moyennées sur une section de conduite nécessite d'établir la forme limite du théorème de Gauss sur une conduite de section non uniforme et variable dans le temps $S(z, t)$ (voir par exemple Delhay *et al.*, 1981, Ch. 7). La démonstration est donnée dans le cas plus général d'une conduite de forme arbitraire et de section circulaire animée de mouvements arbitraires par Coutris (1993). Coutris (1993) ne donne pas explicitement la démonstration pour une section de forme arbitraire mais indique que l'identité obtenue est également vraie pour une conduite de section quelconque. Ce point de détail est vérifié par Lemonnier (2002, annexe A) et nous suivrons le cheminement de la démonstration de ce dernier auteur.

La forme limite du théorème de Gauss s'énonce pour un vecteur \mathbf{B} arbitraire,

$$\boxed{\int_{S(z,t)} \nabla \cdot \mathbf{B} dS = \frac{\partial}{\partial z} \int_{S(z,t)} B_z dS + \int_{C(z,t)} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{n}_\Sigma} dl,} \quad (\text{A.49})$$

où \mathbf{n}_Σ est la normale unitaire extérieure à la surface latérale de la conduite, Σ , \mathbf{n}_C est la normale à la courbe plane $C(z, t)$ qui est le périmètre de la section $S(z, t)$ et l est l'abscisse curviligne le long de C (voir figure A.3).

Considérons le tronçon de conduite $V(z_1, z_2, t)$ représenté à la figure A.3 compris entre les deux sections $S(z_1, t)$ et $S(z_2, t)$ et la surface latérale Σ où z_1 et z_2 sont choisis arbitrairement. Appliquons le théorème de Gauss (A.11) au vecteur \mathbf{B} sur le domaine $V(z_1, z_2, t)$. On a,

$$\int_{V(z_1, z_2, t)} \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_{S(z_1, t)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S(z_2, t)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS + \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_\Sigma dS. \quad (\text{A.50})$$

Un point $M \in S$ a pour coordonnées,

$$S : \mathbf{M} = z\mathbf{e}_z + x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y, \quad (\text{A.51})$$

et en conséquence l'élément de volume de V et de surface sur S sont liés par la relation simple suivante,

$$dV = dx dy dz = dS dz. \quad (\text{A.52})$$

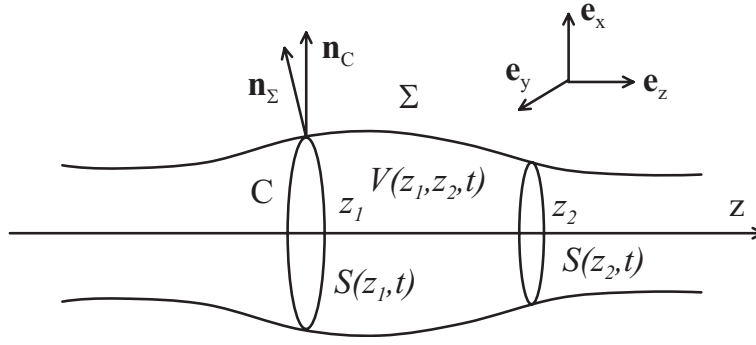


Figure A.3: Tronçon de conduite considéré pour l'établissement des formes limites du théorème de Gauss et de la règle de Leibniz pour une conduite rectiligne.

Le membre de gauche de (A.50) se transforme donc naturellement en une intégrale double selon,

$$\int_{V(z_1, z_2, t)} \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{S(z, t)} \nabla \cdot \mathbf{B} dS \right) dz. \quad (\text{A.53})$$

Le reste de la démonstration consiste à transformer le membre de droite de (A.50) sous une forme analogue à celle de l'équation (A.53) c'est-à-dire en une intégrale sur z d'une fonction définie éventuellement par une intégrale fonction de z .

Ainsi les deux premiers termes du membre de droite de (A.50) se transforment aisément en considérant que sur S_1 et S_2 on a respectivement,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z = -B_z, \quad (\text{A.54})$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z = B_z. \quad (\text{A.55})$$

En conséquence, on a

$$\begin{aligned} & \int_{S(z_1, t)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S(z_2, t)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS = \\ & - \int_{S(z_1, t)} B_z dS + \int_{S(z_2, t)} B_z dS = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{S(z, t)} B_z dS \right) dz. \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Le dernier terme du membre de droite de (A.50) peut se transformer en utilisant le changement de variables dans les intégrales de flux (voir par exemple Aris, 1962, p.48)

$$\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} dS = \int \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_2} du_1 du_2, \quad (\text{A.57})$$

où \mathbf{P} est un point appartenant à la surface latérale de la conduite Σ et u_1, u_2 représente un paramétrage admissible de Σ . En choisissant l et z comme paramètres descriptifs de la surface Σ , un point P de C ou de Σ a pour coordonnées,

$$S : \mathbf{P} = z\mathbf{e}_z + x(z, l, t)\mathbf{e}_x + y(z, l, t)\mathbf{e}_y, \quad (\text{A.58})$$

où l est l'abscisse curviligne le long de C et est orientée positivement de \mathbf{e}_x à \mathbf{e}_y . Le vecteur unitaire tangent à C appartenant à S est donc,

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial l} = x'_l \mathbf{e}_x + y'_l \mathbf{e}_y, \quad (\text{A.59})$$

et le vecteur normal à C appartenant à S et orienté vers l'extérieur est,

$$\mathbf{n}_C = y'_l \mathbf{e}_x - x'_l \mathbf{e}_y \quad (\text{A.60})$$

Le vecteur normal à Σ qui apparaît dans (A.57) et orienté vers l'extérieur de Σ est donc,

$$\mathbf{N}_\Sigma = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial l} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z}, \quad (\text{A.61})$$

et on a ,

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z} = \mathbf{e}_z + x'_z \mathbf{e}_x + y'_z \mathbf{e}_y, \quad (\text{A.62})$$

ce qui conduit à,

$$\mathbf{N}_\Sigma = y'_l \mathbf{e}_x - x'_l \mathbf{e}_y + (x'_l y'_z - x'_z y'_l) \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.63})$$

En reportant ce résultat dans (A.57) on obtient,

$$\int_\Sigma \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_\Sigma dS = \int_\Sigma \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_\Sigma dl dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_C (y'_l B_x - x'_l B_y + (x'_l y'_z - x'_z y'_l) B_z) dl \right) dz. \quad (\text{A.64})$$

En considérant maintenant l'expression de \mathbf{n}_C (A.60) et celle de \mathbf{N}_Σ (A.63), on obtient,

$$\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{N}_\Sigma = (x_l'^2 + y_l'^2) = 1. \quad (\text{A.65})$$

En considérant (A.64) et en remarquant que,

$$\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{n}_\Sigma} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{N}_\Sigma} = y'_l B_x - x'_l B_y + (x'_l y'_z - x'_z y'_l) B_z, \quad (\text{A.66})$$

on montre que,

$$\int_\Sigma \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_\Sigma dS = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_C \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{n}_\Sigma} dl \right) dz. \quad (\text{A.67})$$

En substituant (A.53), (A.56) et (A.67) dans le théorème de Gauss appliqué au volume $V(z_1, z_2, t)$ (A.50), on montre que quelque soit le choix de z_1 et z_2 ,

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{S(z,t)} \nabla \cdot \mathbf{B} dS \right) dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{S(z,t)} B_z dS \right) dz + \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_C \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{n}_\Sigma} dl \right) dz, \quad (\text{A.68})$$

ce qui démontre la forme limite du théorème de Gauss pour une section de conduite de forme arbitraire (A.49).

A.5 Forme limite de la règle de Leibniz pour une section de conduite

L'établissement des équations moyennées sur une section de conduite nécessite d'établir la forme limite de la règle de Leibniz pour une conduite de section non uniforme et variable dans le temps $S(z, t)$ (voir par exemple Delhaye *et al.* , 1981, Ch. 7). La démonstration est donnée dans le cas plus général d'une conduite de forme arbitraire et de section circulaire animée de mouvements arbitraires par Coutris (1993). Coutris (1993) indique que la démonstration repose sur les mêmes étapes que la forme limite du théorème de Gauss. Nous suivrons le cheminement de la démonstration de ce dernier auteur.

La forme limite de la règle de Leibniz s'énonce pour une fonction f arbitraire,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{S(z,t)} f dS = \int_{S(z,t)} \frac{\partial f}{\partial t} dS + \int_{C(z,t)} \frac{f \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{n}_\Sigma} dl} \quad (\text{A.69})$$

où \mathbf{v}_Σ est la vitesse d'un point attaché à la surface latérale Σ et les autres symboles ont la même signification que pour la forme limite du théorème de Gauss (A.49). La démonstration débute par l'application de la règle de Leibniz (A.21) sur le tronçon de conduite $V(z_1, z_2, t)$ représenté à la figure A.3,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(z_1, z_2, t)} f dV = \int_{V(z_1, z_2, t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\Sigma} f \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma dS, \quad (\text{A.70})$$

où on a remarqué que les surfaces $S(z_1, t)$ et $S(z_2, t)$ ne contribuent pas puisqu'elles sont fixes. En considérant que l'élément de volume de V est toujours lié à l'élément de surface de S par (A.52), on a pour le membre de gauche de (A.70),

$$\frac{d}{dt} \int_{V(z_1, z_2, t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{S(z, t)} f dS \right) dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{d}{dt} \int_{S(z, t)} f dS \right) dz \quad (\text{A.71})$$

puisque z_1 et z_2 sont fixés. De même pour le premier terme du membre de droite de (A.70), on a,

$$\int_{V(z_1, z_2, t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{S(z, t)} \frac{\partial f}{\partial t} dS \right) dz. \quad (\text{A.72})$$

Un point attaché à la surface latérale Σ a une vitesse de déplacement \mathbf{v}_Σ que l'on obtient à partir du paramétrage de Σ donné par (A.58),

$$\mathbf{v}_\Sigma = \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right)_{z, l} = x'_t \mathbf{e}_x + y'_t \mathbf{e}_y, \quad (\text{A.73})$$

En conséquence, en considérant l'expression de la normale à Σ , \mathbf{N}_Σ , donnée par (A.63), on obtient,

$$\mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{N}_\Sigma = x'_t y'_l - y'_t x'_l, \quad (\text{A.74})$$

et en conséquence en utilisant la règle du changement de variable dans les intégrales de flux (A.57) on obtient d'une façon analogue à l'équation (A.64),

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma dS = \int_{\Sigma} \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{N}_\Sigma dl dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_C (x'_t y'_l - y'_t x'_l) dl \right) dz. \quad (\text{A.75})$$

Comme on a encore,

$$\frac{\mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{n}_\Sigma} = \frac{\mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{N}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{N}_\Sigma} = x'_t y'_l - y'_t x'_l, \quad (\text{A.76})$$

on montre que,

$$\int_{\Sigma} f \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma dS = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_C \frac{f \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{n}_\Sigma} dl \right) dz. \quad (\text{A.77})$$

Ainsi en substituant (A.71), (A.72) et (A.77) dans (A.70), on montre que quelque soit le choix de z_1 et z_2 on a,

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{d}{dt} \int_{S(z, t)} f dS \right) dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{S(z, t)} \frac{\partial f}{\partial t} dS \right) dz + \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_C \frac{f \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{n}_\Sigma} dl \right) dz, \quad (\text{A.78})$$

ce qui démontre la forme limite de la règle de Leibniz (A.69).

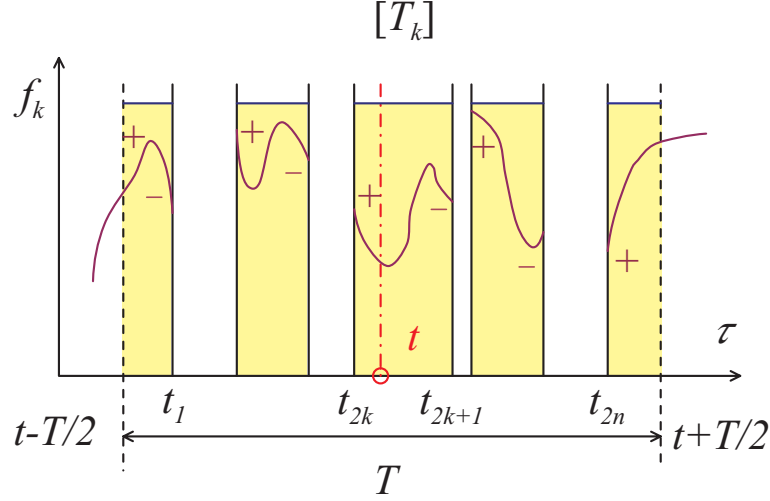


Figure A.4: Représentation d'une fonction définie sur un intervalle de temps. T est le temps d'intégration de la fonction $f(\mathbf{x}, t)$, $[T]$ est l'intervalle de temps de largeur T centré sur le temps de prise de moyenne, t , $[T_k]$ est l'ensemble des intervalles de temps où la phase k est présente au point considéré et on note t_{2k} les instants où le point considéré entre dans la phase k et t_{2k+1} les instants où il en sort.

A.6 Forme limite de la règle de Leibniz pour des fonctions continues par intervalles de temps

L'établissement des équations moyennées sur un intervalle de temps T , nécessite d'établir la forme limite de la règle de Leibniz pour des fonctions définies sur un ensemble d'intervalles de temps. Ce paragraphe reproduit la démonstration donnée par Delhay & Achard (1976). La forme limite considérée s'énonce pour toute fonction f continue et dérivable sur un ensemble d'intervalles de temps par,

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial f}{\partial t} dt = \frac{\partial}{\partial t} \int_{[T_k]} f dt - \sum_{\text{disc.} \in [T]} f \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \quad (\text{A.79})$$

où T est le temps d'intégration d'une fonction dépendant du temps, $[T_k]$ est l'ensemble des intervalles de temps où la phase k est présente au point considéré et la sommation est relative à tous les instants appartenant à $[T]$ où le point considéré entre ou sort de la phase k .

La démonstration de cette identité débute par l'analyse du membre de gauche. On commence par supposer que la fonction est définie au début et à la fin de l'intervalle d'intégration. En s'aidant des notations définies dans la légende de la figure A.4, on observe que,

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial f}{\partial t} dt = \int_{t-T/2}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial t} dt + \dots + \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} \frac{\partial f}{\partial t} dt + \dots + \int_{t_{2n}}^{t+T/2} \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (\text{A.80})$$

Chaque contribution à la somme du membre de gauche s'intègre pour donner,

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial f}{\partial t} dt = f(t_1) - f(t-T/2) + \dots + f(t_{2k+1}) - f(t_{2k}) + \dots + f(t+T/2) - f(t_{2n}). \quad (\text{A.81})$$

Lorsque le point considéré entre dans la phase k à l'instant t_{2k} l'interface s'approche de \mathbf{x} à l'instant considéré en conséquence, la vitesse de l'interface est orientée vers l'extérieur de la phase k et se situe du même coté de l'interface que \mathbf{n}_k , en conséquence,

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k > 0 \text{ à } t_{2k}, \quad (\text{A.82})$$

où on rappelle que $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k$ est la vitesse géométrique de déplacement de l'interface. D'une façon analogue, lorsque le point considéré sort dans la phase k à l'instant t_{2k+1} l'interface s'éloigne de \mathbf{x} à l'instant considéré et la vitesse de l'interface est orientée en conséquence vers la phase k , la vitesse de l'interface et \mathbf{n}_k sont situés de part et d'autre de l'interface, en conséquence,

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k < 0 \text{ à } t_{2k+1}. \quad (\text{A.83})$$

Ces considérations permettent de transformer (A.81) pour obtenir,

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial f}{\partial t} dt = f(t + T/2) - f(t - T/2) - \sum_{\text{disc.} \in [T]} f \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \quad (\text{A.84})$$

où la sommation s'effectue sur l'ensemble des instants où le point considéré entre et sort de la phase k , c'est-à-dire sur tous les instants où f est discontinue. Calculons ensuite l'intégrale apparaissant dans le membre de droite de l'équation (A.79),

$$\int_{[T_k]} f dt = \int_{t-T/2}^{t_1} f dt + \cdots + \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} f dt + \cdots + \int_{t_{2n}}^{t+T/2} f dt. \quad (\text{A.85})$$

On observe que seules la première et la dernière intégrale possède une borne supérieure dépendant du temps. En appliquant le théorème de dérivation sous le signe somme (A.20), il vient,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{[T_k]} f dt = f(t + T/2) - f(t - T/2), \quad (\text{A.86})$$

étant donné que la fonction f dépend certes du temps, mais pas de l'instant, t , où l'on calcule la moyenne. En conséquence, en reportant cette relation dans (A.84) on obtient la forme limite de la règle de Leibniz recherchée.

Supposons maintenant, qu'à l'instant initial de début d'intégration, $t - T/2$, ou à l'instant final $t + T/2$, le point \mathbf{x} n'appartienne pas à la phase k . On observe alors que sa contribution dans (A.84) et (A.86) disparaît simultanément, si bien que la forme limite démontrée (A.79) reste également vraie.

A.7 Forme limite du théorème de Gauss pour des fonctions continues par intervalles de temps

L'établissement des équations moyennées sur un intervalle de temps T , nécessite d'établir la forme limite du théorème de Gauss pour des fonctions définies sur un ensemble d'intervalles de temps. Ce paragraphe reproduit la démonstration donnée par Delhay & Achard (1976). La forme limite considérée s'énonce pour tout vecteur \mathbf{B} continu et différentiable sur un ensemble d'intervalles de temps par,

$$\boxed{\int_{[T_k]} \nabla \cdot \mathbf{B} dt = \nabla \cdot \int_{[T_k]} \mathbf{B} dt + \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}} \quad (\text{A.87})$$

La démonstration de cette identité suit un cheminement analogue à celle de la forme limite de la règle de Leibniz (A.79). Commençons par considérer que la phase k est présente au point \mathbf{x} au début et à la fin de l'intervalle d'intégration (voir figure A.4). Considérons l'intégrale suivante,

$$\int_{[T_k]} \mathbf{B} dt = \int_{t-T/2}^{t_1} \mathbf{B} dt + \cdots + \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} \mathbf{B} dt + \cdots + \int_{t_{2n}}^{t+T/2} \mathbf{B} dt. \quad (\text{A.88})$$

où l'on remarque que les instants où la phase k quitte ou arrive au point \mathbf{x} , dépendent directement des coordonnées x_i de ce point,

$$t_k = t_k(\mathbf{x}), \quad (\text{A.89})$$

et où on rappelle que la divergence d'un vecteur est donnée en coordonnées cartésiennes par,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (\text{A.90})$$

En appliquant successivement le théorème de dérivation sous le signe somme (A.20) avec la variable x_i à la $i^{\text{ème}}$ composante de (A.88) et en sommant les résultats obtenus on a,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \int_{[T_k]} \mathbf{B} dt &= \int_{t-T/2}^{t_1} \nabla \cdot \mathbf{B} dt + \cdots + \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} \nabla \cdot \mathbf{B} dt + \cdots + \int_{t_{2n}}^{t+T/2} \nabla \cdot \mathbf{B} dt + \\ &+ \nabla t_1 \cdot \mathbf{B}(t_1) + \cdots + \nabla t_{2k+1} \cdot \mathbf{B}(t_{2k+1}) - \nabla t_{2k} \cdot \mathbf{B}(t_{2k}) + \cdots - \nabla t_{2n} \cdot \mathbf{B}(t_{2n}). \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

En utilisant le raisonnement développé pour la forme limite de la règle de Leibniz (A.82) et (A.83), on obtient,

$$\nabla \cdot \int_{[T_k]} \mathbf{B} dt = \int_{[T_k]} \nabla \cdot \mathbf{B} dt - \sum_{\text{disc.} \in [T]} \nabla t_k \cdot \mathbf{B} \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}. \quad (\text{A.92})$$

Lorsque surface géométrique représentant l'interface est décrite implicitement par une fonction f ,

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad (\text{A.93})$$

on rappelle que la vitesse géométrique de déplacement de l'interface (3.8) est donnée par,

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\nabla f|}. \quad (\text{A.94})$$

où le vecteur unitaire normal à la surface est donné par,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}. \quad (\text{A.95})$$

La donnée de la surface sous forme implicite (A.93) permet de calculer implicitement l'instant $t(x, y, z)$ où le point \mathbf{x} appartient à la surface. En utilisant le théorème de dérivation des fonctions implicites, on en déduit la variation de t avec la position. Par exemple pour la variation selon x on a,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}}. \quad (\text{A.96})$$

En pratiquant de même pour chacune des deux directions restantes on obtient,

$$\nabla t(\mathbf{x}) = -\frac{\nabla f}{\frac{\partial f}{\partial t}} \quad (\text{A.97})$$

En éliminant $\frac{\partial f}{\partial t}$ dans cette dernière expression en utilisant la définition de la vitesse d'interface (A.94) et la valeur absolue de ∇f qui apparaît en utilisant la définition de la normale (A.95), on obtient,

$$\nabla t(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}_k}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k}. \quad (\text{A.98})$$

En reportant ce résultat dans (A.92), on démontre la forme limite du théorème de Gauss (A.87).

On observe que les instants initial et final d'intégration n'interviennent pas directement dans le calcul de sommation sur l'ensemble des discontinuités de \mathbf{B} (A.92), si bien que le résultat est toujours valable que les instants initial et final appartiennent à la phase k ou non.

A.8 Commutativité des termes d'interaction à l'interface

Ce paragraphe reproduit la démonstration originale de la commutativité des moyennes spatiales et temporelles dans l'expression des termes d'interaction. Cette démonstration est due à Delhay & Achard (1976). Le premier paragraphe s'intéresse au cas de la moyenne sur la section et de la moyenne temporelle tandis que le second est relatif à la moyenne volumique et à la moyenne temporelle.

A.8.1 Cas de la moyenne sur une section de conduite

Lorsque l'on moyenne sur la section les équations locales moyennées en temps ou bien lorsque l'on moyenne en temps les équations moyennées sur la section on obtient deux expressions différentes des termes d'interaction qui sont équivalentes,

$$\overline{\int_{C(z,t)} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} = A \nless \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 2. \quad (\text{A.99})$$

On peut montrer que ces termes sont identiques si on démontre l'identité suivante, pour tout vecteur \mathbf{B}_k défini dans la phase k ,

$$\overline{\int_{C(z,t)} (\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} = A \nless \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 2. \quad (\text{A.100})$$

L'objet de ce paragraphe est de fournir une démonstration de cette relation. La démonstration n'est pas très directe, toutefois elle fournit le résultat recherché. Le premier temps consiste à intégrer sur la section de la conduite supposée fixe, A , la forme limite du théorème de Gauss pour les fonctions continues par intervalles (A.87). Ainsi pour tout vecteur \mathbf{B}_k défini dans la phase k , on a,

$$\int_A dS \int_{[T_k]} \nabla \cdot \mathbf{B}_k dt = \int_A dS \nabla \cdot \int_{[T_k]} \mathbf{B}_k dt + A \nless \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 2. \quad (\text{A.101})$$

En introduisant la notation relative à la valeur moyenne sur la section, on obtient,

$$A \nless \alpha_k T \overline{\nabla \cdot \mathbf{B}_k^X} \nless 2 = A \nless \nabla \cdot (\alpha_k T \overline{\mathbf{B}_k^X}) \nless 2 + A \nless \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 2. \quad (\text{A.102})$$

En utilisant la forme limite du théorème de Gauss pour la section (A.49) que l'on utilise pour transformer le premier terme du membre de droite, on obtient,

$$A \nless \nabla \cdot (\alpha_k T \overline{\mathbf{B}_k^X}) \nless 2 = T \frac{\partial}{\partial z} A \nless \alpha_k \overline{\mathbf{B}_k^X} \cdot \mathbf{e}_z \nless 2 + T \sum_{k=1}^2 \int_{C_k} \alpha_k \overline{\mathbf{B}_k^X} \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}. \quad (\text{A.103})$$

En reportant cette relation dans la précédente on obtient,

$$\begin{aligned} A \nless \alpha_k T \overline{\nabla \cdot \mathbf{B}_k^X} \nless 2 &= T \frac{\partial}{\partial z} A \nless \alpha_k \overline{\mathbf{B}_k^X} \cdot \mathbf{e}_z \nless 2 \\ &+ A \nless \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 2 + T \int_{C_1 \cup C_2} \alpha_k \overline{\mathbf{B}_k^X} \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}. \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

Cette relation constitue le premier temps de la démonstration. Le second consiste à intégrer sur un intervalle de temps $[T]$ la forme limite du théorème de Gauss pour une section de conduite (A.49), appliqué à la section de la conduite baignée par la phase k , A_k . On notera que le

périmètre de la section A_k est limité en partie par l'interface C et la fraction de la paroi mouillée par la phase k , C_k . $C \cup C_k$ forme une partition du périmètre de A_k .

$$\begin{aligned} \int_{[T]} dt \int_{A_k} \nabla \cdot \mathbf{B}_k dS &= \int_{[T]} dt \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k} \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{e}_z dS \\ &+ \int_{[T]} dt \int_C \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{[T]} dt \int_{C_k} \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}. \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

En introduisant les notations relatives aux opérateurs de moyenne on obtient,

$$\begin{aligned} T \overline{AR_{k2} < \nabla \cdot \mathbf{B}_k >_2} &= T \frac{\partial}{\partial z} \overline{AR_{k2} < \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{e}_z >_2} \\ &+ T \overline{\int_C \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} + T \overline{\int_{C_k} \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

Une dernière manipulation du dernier terme est encore nécessaire. On peut pour ce terme faire commuter la moyenne temporelle et spatiale en introduisant la fonction caractéristique de phase X_k ,

$$\begin{aligned} T \overline{\int_{C_k} \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} &= T \overline{\int_{C_1 \cup C_2} X_k \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} = \\ T \overline{\int_{C_1 \cup C_2} \overline{X_k} \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} &= T \overline{\int_{C_1 \cup C_2} \alpha_k \overline{\mathbf{B}}_k \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

où on a noté que le périmètre de la conduite, $C_1 \cup C_2$, ne dépend pas du temps. En reportant cette expression dans (A.106), on obtient,

$$\begin{aligned} T \overline{AR_{k2} < \nabla \cdot \mathbf{B}_k >_2} &= T \frac{\partial}{\partial z} \overline{AR_{k2} < \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{e}_z >_2} \\ &+ T \overline{\int_C \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} + T \overline{\int_{C_1 \cup C_2} \alpha_k \overline{\mathbf{B}}_k \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

Finalement, en rapprochant les équations (A.104) et (A.108), on observe que chacune des ces relations est composée de quatre termes. Les deux premiers sont égaux deux à deux en vertu de la commutativité des opérateurs de moyenne et que le quatrième est identique dans chaque expression. En conséquence ce résultat démontre la relation (A.100) exprimant la commutativité des moyennes temporelle et sur la section dans l'expression du terme d'interaction à l'interface.

A.8.2 Cas de la moyenne sur un volume

La définition de l'aire interfaciale locale nécessite la démonstration d'une identité exprimant la commutativité des opérations de moyennes volumique et temporelle dans l'expression des termes d'interaction aux interfaces. Ces termes apparaissent de plus explicitement dans les modèles où l'on effectue une moyenne sur un volume (voir par exemple Bergles *et al.*, 1981, éq. 2.125)

$$\overline{\int_{A_i(t)} (\dot{n}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}_k) dS} = V \nless \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{n}_k \psi_k + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 3. \quad (\text{A.109})$$

Comme au paragraphe précédent, il suffit de démontrer l'identité suivante pour s'assurer de l'identité des termes d'interaction (A.109),

$$\overline{\int_{A_i(t)} (\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k) dS} = V \nless \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 3. \quad (\text{A.110})$$

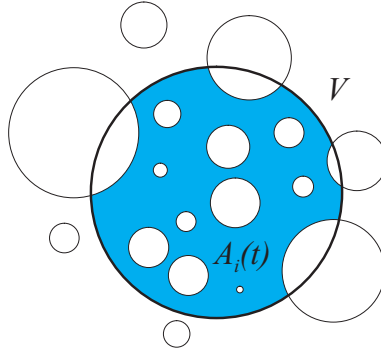


Figure A.5: Représentation du volume V pour la démonstration de la commutativité des intégration spatiale et temporelle (A.110).

La démonstration est analogue à celle du paragraphe précédent. On intègre sur le volume V représenté à la figure A.5 la forme limite du théorème de Gauss pour les fonctions définies sur un intervalle de temps (A.87)

$$\int_V dV \int_{[T_k]} \nabla \cdot \mathbf{B}_k dt = \int_V dV \nabla \cdot \int_{[T_k]} \mathbf{B}_k dt + V \nless \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 3. \quad (\text{A.111})$$

On applique le théorème de Gauss à l'intégrale de la divergence et en notant que V est fixe et en introduisant la fonction indicatrice de phase,

$$\int_V dV \int_{[T]} X_k \nabla \cdot \mathbf{B}_k dt = \int_{\partial V} dS \mathbf{n} \cdot \int_{[T_k]} \mathbf{B}_k dt + V \nless \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 3. \quad (\text{A.112})$$

où ∂V est la surface entourant le volume V et \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à ∂V et dirigé vers l'extérieur. En inversant l'ordre d'intégration sur le premier terme et en introduisant la valeur moyenne temporelle dans le second, on obtient,

$$\int_{[T]} dt \int_V X_k \nabla \cdot \mathbf{B}_k dV = \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot (\alpha_k T \overline{\mathbf{B}_k^X}) dS + V \nless \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 3. \quad (\text{A.113})$$

En éliminant la fonction indicatrice de phase du premier membre, on termine le premier temps de la démonstration.

$$\int_{[T]} dt \int_{V_k} \nabla \cdot \mathbf{B}_k dV = \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot (\alpha_k T \overline{\mathbf{B}_k^X}) dS + V \nless \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \nless 3. \quad (\text{A.114})$$

Le premier membre de cette équation se transforme, en appliquant le théorème de Gauss au volume V_k représentant la fraction du volume V occupé par la phase k ,

$$\int_{[T]} dt \int_{V_k} \nabla \cdot \mathbf{B}_k dV = \int_{[T]} dt \int_{\partial V_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B}_k dS \quad (\text{A.115})$$

où comme le montre la figure A.5, la surface ∂V_k limitant le volume V_k est constituée par les interfaces appartenant à V soit A_i et la fraction de ∂V mouillée par la phase k que l'on note $[\partial V]_k$. En conséquence l'intégrale de flux dans (A.115) comporte deux contributions distinctes,

$$\int_{[T]} dt \int_{V_k} \nabla \cdot \mathbf{B}_k dV = T \overline{\int_{A_i} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B}_k dS} + \int_{[T]} dt \int_{[\partial V]_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B}_k dS \quad (\text{A.116})$$

En introduisant la fonction indicatrice de phase sur le dernier terme, ce qui permet d'échanger l'ordre d'intégration on obtient,

$$\begin{aligned} \int_{[T]} dt \int_{[\partial V]_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B}_k dS &= \int_{[T]} dt \int_{[\partial V]} X_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B}_k dS = \\ \int_{[\partial V]} dS \int_{[T]} X_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B}_k dt &= \int_{[\partial V]} dS \int_{[T_k]} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B}_k dt = \int_{[\partial V]} \alpha_k T \mathbf{n}_k \cdot \overline{\mathbf{B}}_k^X dS. \end{aligned} \quad (\text{A.117})$$

En reportant ce résultat dans (A.116),

$$\int_{[T]} dt \int_{V_k} \nabla \cdot \mathbf{B}_k dV = T \overline{\int_{A_i} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B}_k dS} + \int_{[\partial V]} \mathbf{n} \cdot (\alpha_k T \overline{\mathbf{B}}_k^X) dS. \quad (\text{A.118})$$

En rapprochant les deux expressions (A.114) et (A.118), on observe que l'on calcule de deux façons différentes la même quantité et que chaque membre de droite comporte un terme identique. En conséquence, l'identité (A.110) est démontrée.

A.9 Forme limite du théorème de Gauss pour le filtrage spatial

Annexe B

Symétrie du tenseur des contraintes

Lorsqu'un fluide est dit non polaire (Aris, 1962, P. 102), les seuls couples appliqués résultent du moment des forces de contact et de volume. Le bilan de quantité de mouvement angulaire s'exprime alors selon (3.25). On montre alors en utilisant le bilan de masse et de quantité de mouvement sous forme locale que le bilan de quantité de mouvement angulaire n'apporte pas d'autre information que la symétrie du tenseur des contraintes. En conséquence, si le tenseur des contraintes est symétrique, le bilan de quantité de mouvement angulaire est une conséquence du bilan de masse et de quantité de mouvement.

B.1 Théorème de transport et bilan de masse

Le théorème de transport de Reynolds sous la forme (A.39) s'écrit pour tout volume matériel $V_m(t)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{df}{dt} + f \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV. \quad (\text{B.1})$$

Pour toute fonction f et où l'on a pris en compte que le mouvement considéré est celui du fluide puisque le volume est matériel ($\mathbf{u} = \mathbf{v}$). Le principe de conservation de la masse appliqué au volume matériel (3.23) s'écrit en utilisant le théorème de transport de Reynolds (B.1),

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (\text{B.2})$$

Comme cette équation s'applique à un volume $V_m(t)$ arbitraire, l'expression sous le signe somme doit être identiquement nulle. En conséquence,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Ainsi, pour toute quantité massique F , le théorème de transport de Reynolds donne,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho F dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{d}{dt} \rho F + \rho F \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV. \quad (\text{B.4})$$

En développant la dérivée du produit et en regroupant les termes restants on a,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho F dV = \int_{V_m(t)} \left\{ \rho \frac{dF}{dt} + F \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right\} dV. \quad (\text{B.5})$$

En utilisant le bilan de masse local (B.3) on obtient,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho F dV = \int_{V_m(t)} \rho \frac{dF}{dt} dV. \quad (\text{B.6})$$

B.2 Théorème de transport et bilan de quantité de mouvement linéaire

Le principe fondamentale de la dynamique appliqué à un volume matériel (3.24) s'écrit,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbb{T} dS + \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{F} dV. \quad (\text{B.7})$$

En appliquant le théorème de Gauss à l'intégrale de surface et en transformant la dérivée de l'intégrale de volume par (B.6), on obtient pour tout volume matériel considéré,

$$\int_{V_m(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV - \int_{V_m(t)} \nabla \cdot \mathbb{T} dS - \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{F} dV = 0, \quad (\text{B.8})$$

et en conséquence comme pour l'établissement du bilan de masse (B.3), l'expression sous le signe somme doit être identiquement nulle,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \cdot \mathbb{T} - \rho \mathbf{F} = 0, \quad (\text{B.9})$$

ce qui est une autre expression du bilan de quantité de mouvement linéaire (3.33).

B.3 Bilan de quantité de mouvement angulaire

Le bilan de quantité de mouvement angulaire appliqué à un volume matériel s'écrit pour un fluide non polaire ne subissant pas de couples appliqués directement au fluide (Aris, 1962, p. 102)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \int_{S_m(t)} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbb{T}) dS + \int_{V_m(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} dV \quad (\text{B.10})$$

où \mathbf{r} est le vecteur position. En appliquant l'identité déduite du théorème de transport de Reynolds et du bilan de masse (B.6), on obtient pour le membre de gauche :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \int_{V_m(t)} \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dV. \quad (\text{B.11})$$

Or, puisque $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (\text{B.12})$$

La $i^{\text{ème}}$ composante de $\mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbb{T})$ s'écrit :

$$[\mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbb{T})]_i = \epsilon_{ijk} x_j T_{pk} n_p, \quad (\text{B.13})$$

et elle est de la forme $a_p n_p$. L'intégrale des moments des contraintes dans (B.10) est donc une intégrale de flux que l'on peut transformer par le théorème de Gauss :

$$\int_{S_m(t)} \epsilon_{ijk} x_j T_{pk} n_p dS = \int_{V_m(t)} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_p} (x_j T_{pk}) dV. \quad (\text{B.14})$$

En développant le produit, il vient

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_p} (x_j T_{pk}) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_p} T_{pk} + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{pk}}{\partial x_p}. \quad (\text{B.15})$$

Or $\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk}$, où il est rappelé que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. L'expression (B.15) se simplifie en

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_p} (x_j T_{pk}) = \epsilon_{ijk} T_{jk} + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{pk}}{\partial x_p} = [\mathbb{T}_\times + \mathbf{r} \times \nabla \cdot \mathbb{T}]_i. \quad (\text{B.17})$$

Finalement, en regroupant les différentes contributions (B.11) compte tenu de (B.12) et (B.17), le bilan de quantité de mouvement angulaire (B.10) s'écrit

$$\int_{V_m(t)} \mathbf{r} \times \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \cdot \mathbb{T} - \rho \mathbf{F} \right) dV = \int_{V_m(t)} \mathbb{T}_\times dV. \quad (\text{B.18})$$

Le membre de gauche étant identiquement nul en raison du bilan de quantité de mouvement linéaire (B.9), le membre de droite est aussi nul. Comme ce dernier l'est quel que soit le volume $V_m(t)$ considéré,

$$\mathbb{T}_\times = 0. \quad (\text{B.19})$$

Les composantes du vecteur \mathbb{T}_\times sont égales à $\epsilon_{ijk} T_{jk}$ soit respectivement $(T_{23} - T_{32})$, $(T_{31} - T_{13})$ et $(T_{12} - T_{21})$ et puisqu'elles sont nulles on a,

$$T_{ij} = T_{ji}, \quad (\text{B.20})$$

ce qui prouve que le tenseur des contraintes est symétrique.

Annexe C

Propriétés thermodynamiques de l'eau à l'état saturant

C.1 Propriétés thermodynamiques

Les propriétés thermodynamiques de l'eau et de certains fluides courants sont disponibles dans de nombreuses tables comme celles de Irvine & Liley (1984), Schmidt (1982) ou de Haar *et al.* (1984). Ces auteurs fournissent également des formules qui permettent de calculer les propriétés désirées.

Les formulations cohérentes d'un point de vue thermodynamique reposent sur la modélisation de l'énergie ou de l'enthalpie libre. En effet toutes les propriétés thermodynamiques à l'état saturant et dans chaque phase s'en déduisent par dérivation. Les tables qui suivent ont été calculées selon la méthode de Haar *et al.* (1984) car la formulation de ces auteurs décrit également les états métastables du liquide et de la vapeur.

Les tables qui suivent décrivent les propriétés physiques de l'eau et de sa vapeur le long de la courbe de saturation, c'est-à-dire les conditions où les deux phases coexistent. Les unités des différentes quantités sont les suivantes,

- pression : bar
- température : °C
- masse volumique : kg/m³
- enthalpie : kJ/kg
- entropie : kJ/kg/°C

T_{sat} °C	p (bar)	ρ_L (kg/m ³)	ρ_V (kg/m ³)	h_L (kJ/kg)	h_V (kJ/kg)	s_L (kJ/kg/K)	s_V (kJ/kg/K)
0,01	0,0061173	999,78	0,004855	0,00	2500,5	0,00000	9,1541
1	0,0065716	999,85	0,005196	4,18	2502,4	0,01528	9,1277
2	0,0070605	999,90	0,005563	8,40	2504,2	0,03064	9,1013
3	0,0075813	999,93	0,005952	12,61	2506,0	0,04592	9,0752
4	0,0081359	999,95	0,006364	16,82	2507,9	0,06112	9,0492
5	0,0087260	999,94	0,006802	21,02	2509,7	0,07626	9,0236
6	0,0093537	999,93	0,007265	25,22	2511,6	0,09132	8,9981
7	0,0100209	999,89	0,007756	29,42	2513,4	0,10632	8,9729
8	0,0107297	999,84	0,008275	33,61	2515,2	0,12126	8,9479
9	0,0114825	999,77	0,008824	37,80	2517,1	0,13614	8,9232
10	0,012281	999,69	0,009405	41,99	2518,9	0,15096	8,8986
11	0,013129	999,60	0,010019	46,18	2520,7	0,16573	8,8743
12	0,014027	999,49	0,010668	50,36	2522,6	0,18043	8,8502
13	0,014979	999,37	0,011353	54,55	2524,4	0,19509	8,8263
14	0,015988	999,24	0,012075	58,73	2526,2	0,20969	8,8027
15	0,017056	999,09	0,012837	62,92	2528,0	0,22423	8,7792
16	0,018186	998,93	0,013641	67,10	2529,9	0,23873	8,7560
17	0,019380	998,76	0,014488	71,28	2531,7	0,25317	8,7330
18	0,020644	998,58	0,015380	75,47	2533,5	0,26756	8,7101
19	0,021979	998,39	0,016319	79,65	2535,4	0,28191	8,6875
20	0,023388	998,19	0,017308	83,84	2537,2	0,29620	8,6651
21	0,024877	997,97	0,018348	88,02	2539,0	0,31045	8,6428
22	0,026447	997,75	0,019441	92,20	2540,8	0,32465	8,6208
23	0,028104	997,52	0,020590	96,39	2542,6	0,33880	8,5990
24	0,029850	997,27	0,021797	100,57	2544,5	0,35290	8,5773
25	0,031691	997,02	0,023065	104,75	2546,3	0,36695	8,5558
26	0,033629	996,76	0,024393	108,94	2548,1	0,38096	8,5346
27	0,035670	996,48	0,025789	113,12	2549,9	0,39492	8,5135
28	0,037819	996,20	0,027253	117,30	2551,7	0,40884	8,4926
29	0,040078	995,91	0,028788	121,49	2553,5	0,42270	8,4719
30	0,042455	995,61	0,030397	125,67	2555,3	0,43653	8,4513
31	0,044953	995,30	0,032082	129,85	2557,2	0,45030	8,4309
32	0,047578	994,99	0,033847	134,04	2559,0	0,46403	8,4107
33	0,050335	994,66	0,035694	138,22	2560,8	0,47772	8,3907
34	0,053229	994,33	0,037627	142,41	2562,6	0,49136	8,3708
35	0,056267	993,99	0,039648	146,59	2564,4	0,50496	8,3511
36	0,059454	993,64	0,041762	150,77	2566,2	0,51851	8,3316
37	0,062795	993,28	0,043971	154,95	2568,0	0,53202	8,3122
38	0,066298	992,92	0,046279	159,14	2569,8	0,54548	8,2930
39	0,069969	992,55	0,048690	163,32	2571,6	0,55890	8,2739
40	0,073814	992,17	0,05121	167,50	2573,4	0,57228	8,2550
41	0,077840	991,78	0,05383	171,69	2575,2	0,58562	8,2363
42	0,082054	991,39	0,05657	175,87	2576,9	0,59891	8,2177
43	0,086464	990,99	0,05943	180,05	2578,7	0,61216	8,1993
44	0,091076	990,58	0,06241	184,23	2580,5	0,62536	8,1810
45	0,095898	990,17	0,06552	188,42	2582,3	0,63853	8,1629
46	0,100938	989,74	0,06875	192,60	2584,1	0,65165	8,1449
47	0,106205	989,32	0,07212	196,78	2585,9	0,66473	8,1271
48	0,111706	988,88	0,07563	200,96	2587,6	0,67778	8,1094
49	0,117449	988,44	0,07928	205,15	2589,4	0,69078	8,0919
50	0,12345	987,99	0,08308	209,33	2591,2	0,70374	8,0745
51	0,12970	987,54	0,08703	213,51	2593,0	0,71666	8,0572
52	0,13623	987,08	0,09114	217,69	2594,7	0,72954	8,0401
53	0,14303	986,61	0,09541	221,87	2596,5	0,74238	8,0231
54	0,15012	986,13	0,09985	226,06	2598,3	0,75518	8,0063

T_{sat} °C	p (bar)	ρ_L (kg/m ³)	ρ_V (kg/m ³)	h_L (kJ/kg)	h_V (kJ/kg)	s_L (kJ/kg/K)	s_V (kJ/kg/K)
55	0,15752	985,65	0,10447	230,24	2600,0	0,76794	7,9896
56	0,16522	985,17	0,10926	234,42	2601,8	0,78067	7,9730
57	0,17324	984,68	0,11423	238,60	2603,5	0,79335	7,9565
58	0,18159	984,18	0,11939	242,79	2605,3	0,80600	7,9402
59	0,19028	983,67	0,12475	246,97	2607,0	0,81861	7,9240
60	0,19932	983,16	0,13031	251,15	2608,8	0,83118	7,9080
61	0,20873	982,65	0,13607	255,34	2610,5	0,84372	7,8920
62	0,21851	982,13	0,14205	259,52	2612,3	0,85622	7,8762
63	0,22868	981,60	0,14824	263,71	2614,0	0,86868	7,8605
64	0,23925	981,07	0,15466	267,89	2615,8	0,88111	7,8449
65	0,25023	980,53	0,16131	272,08	2617,5	0,89350	7,8295
66	0,26163	979,98	0,16819	276,26	2619,2	0,90586	7,8141
67	0,27347	979,43	0,17532	280,45	2620,9	0,91818	7,7989
68	0,28576	978,88	0,18270	284,63	2622,7	0,93047	7,7838
69	0,29852	978,32	0,19034	288,82	2624,4	0,94272	7,7688
70	0,31176	977,75	0,19824	293,01	2626,1	0,95494	7,7540
71	0,32549	977,18	0,20641	297,20	2627,8	0,96712	7,7392
72	0,33972	976,60	0,21486	301,39	2629,5	0,97927	7,7245
73	0,35448	976,02	0,22359	305,58	2631,2	0,99139	7,7100
74	0,36978	975,43	0,23262	309,77	2632,9	1,00347	7,6956
75	0,38563	974,84	0,24195	313,96	2634,6	1,01552	7,6812
76	0,40205	974,24	0,25159	318,15	2636,3	1,02754	7,6670
77	0,41905	973,64	0,26154	322,34	2638,0	1,03953	7,6529
78	0,43665	973,03	0,27182	326,54	2639,7	1,05148	7,6389
79	0,45488	972,41	0,28242	330,73	2641,4	1,06340	7,6250
80	0,47373	971,79	0,29337	334,93	2643,1	1,07530	7,6111
81	0,49324	971,17	0,30467	339,12	2644,7	1,08716	7,5974
82	0,51342	970,54	0,31632	343,32	2646,4	1,09898	7,5838
83	0,53428	969,91	0,32834	347,52	2648,1	1,11078	7,5703
84	0,55585	969,27	0,34073	351,72	2649,8	1,12255	7,5569
85	0,57815	968,62	0,35351	355,92	2651,4	1,13429	7,5436
86	0,60119	967,98	0,36667	360,12	2653,1	1,14599	7,5303
87	0,62499	967,32	0,38024	364,32	2654,7	1,15767	7,5172
88	0,64958	966,66	0,39422	368,52	2656,4	1,16932	7,5042
89	0,67496	966,00	0,40862	372,73	2658,0	1,18094	7,4912
90	0,70117	965,33	0,42345	376,93	2659,6	1,19253	7,4783
91	0,72823	964,66	0,43871	381,14	2661,3	1,20409	7,4656
92	0,75614	963,98	0,45443	385,35	2662,9	1,21562	7,4529
93	0,78495	963,30	0,47060	389,56	2664,5	1,22713	7,4403
94	0,81466	962,61	0,48724	393,77	2666,1	1,23860	7,4278
95	0,84529	961,92	0,5044	397,98	2667,7	1,25005	7,4154
96	0,87688	961,22	0,5220	402,20	2669,4	1,26147	7,4030
97	0,90945	960,52	0,5401	406,41	2671,0	1,27287	7,3908
98	0,94301	959,82	0,5587	410,63	2672,6	1,28423	7,3786
99	0,97759	959,11	0,5778	414,84	2674,1	1,29557	7,3665
100	1,0132	958,39	0,5975	419,06	2675,7	1,30688	7,3545
101	1,0499	957,67	0,6177	423,28	2677,3	1,31817	7,3425
102	1,0877	956,95	0,6385	427,51	2678,9	1,32943	7,3307
103	1,1266	956,22	0,6598	431,73	2680,5	1,34066	7,3189
104	1,1667	955,49	0,6818	435,96	2682,0	1,35187	7,3072
105	1,2079	954,75	0,7043	440,18	2683,6	1,36305	7,2956
106	1,2503	954,01	0,7274	444,41	2685,1	1,37420	7,2840
107	1,2939	953,26	0,7511	448,64	2686,7	1,38533	7,2725
108	1,3388	952,51	0,7754	452,87	2688,2	1,39643	7,2611
109	1,3850	951,76	0,8004	457,10	2689,7	1,40751	7,2498

T_{sat} °C	p (bar)	ρ_L (kg/m ³)	ρ_V (kg/m ³)	h_L (kJ/kg)	h_V (kJ/kg)	s_L (kJ/kg/K)	s_V (kJ/kg/K)
110	1,4324	951,00	0,8260	461,34	2691,3	1,41856	7,2386
111	1,4812	950,23	0,8523	465,57	2692,8	1,42959	7,2274
112	1,5313	949,46	0,8793	469,81	2694,3	1,44060	7,2162
113	1,5829	948,69	0,9069	474,05	2695,8	1,45158	7,2052
114	1,6358	947,91	0,9353	478,29	2697,3	1,46253	7,1942
115	1,6902	947,13	0,9644	482,54	2698,8	1,47346	7,1833
116	1,7461	946,34	0,9941	486,78	2700,3	1,48437	7,1725
117	1,8034	945,55	1,0247	491,03	2701,8	1,49525	7,1617
118	1,8623	944,76	1,0560	495,28	2703,3	1,50611	7,1510
119	1,9228	943,96	1,0880	499,53	2704,7	1,51695	7,1403
120	1,9848	943,16	1,1209	503,78	2706,2	1,52776	7,1297
121	2,0485	942,35	1,1545	508,03	2707,7	1,53855	7,1192
122	2,1139	941,54	1,1889	512,29	2709,1	1,54932	7,1087
123	2,1809	940,72	1,2242	516,55	2710,5	1,56006	7,0983
124	2,2496	939,90	1,2603	520,81	2712,0	1,57078	7,0880
125	2,3201	939,07	1,2973	525,07	2713,4	1,58148	7,0777
126	2,3924	938,24	1,3351	529,33	2714,8	1,59216	7,0675
127	2,4666	937,41	1,3738	533,60	2716,2	1,60281	7,0573
128	2,5425	936,57	1,4134	537,87	2717,6	1,61344	7,0472
129	2,6204	935,73	1,4539	542,14	2719,0	1,62405	7,0372
130	2,7002	934,88	1,4954	546,41	2720,4	1,63464	7,0272
131	2,7820	934,03	1,5378	550,68	2721,8	1,64521	7,0172
132	2,8657	933,18	1,5812	554,96	2723,2	1,65575	7,0074
133	2,9515	932,32	1,6255	559,24	2724,5	1,66628	6,9975
134	3,0393	931,45	1,6708	563,52	2725,9	1,67678	6,9878
135	3,1293	930,59	1,7172	567,80	2727,2	1,68726	6,9780
136	3,2214	929,71	1,7646	572,08	2728,6	1,69772	6,9684
137	3,3157	928,84	1,8130	576,37	2729,9	1,70816	6,9587
138	3,4122	927,96	1,8625	580,66	2731,2	1,71858	6,9492
139	3,5109	927,07	1,9130	584,95	2732,5	1,72898	6,9397
140	3,6120	926,18	1,9647	589,24	2733,8	1,73936	6,9302
141	3,7153	925,29	2,0175	593,54	2735,1	1,74972	6,9208
142	3,8211	924,39	2,0714	597,84	2736,4	1,76006	6,9114
143	3,9292	923,49	2,1264	602,14	2737,7	1,77038	6,9021
144	4,0398	922,58	2,1826	606,44	2739,0	1,78068	6,8928
145	4,1529	921,67	2,2400	610,75	2740,2	1,79096	6,8836
146	4,2685	920,76	2,2986	615,06	2741,5	1,80122	6,8744
147	4,3867	919,84	2,3584	619,37	2742,7	1,81146	6,8652
148	4,5075	918,92	2,4195	623,68	2744,0	1,82168	6,8561
149	4,6310	917,99	2,4818	628,00	2745,2	1,83189	6,8471
150	4,7572	917,06	2,5455	632,32	2746,4	1,84207	6,8381
151	4,8861	916,12	2,6104	636,64	2747,6	1,85224	6,8291
152	5,0178	915,18	2,6766	640,96	2748,8	1,86239	6,8202
153	5,1523	914,24	2,7442	645,29	2750,0	1,87252	6,8113
154	5,2896	913,29	2,8131	649,62	2751,1	1,88263	6,8025
155	5,4299	912,33	2,8834	653,95	2752,3	1,89272	6,7937
156	5,5732	911,38	2,9551	658,28	2753,5	1,90280	6,7849
157	5,7194	910,41	3,0282	662,62	2754,6	1,91286	6,7762
158	5,8687	909,45	3,1028	666,96	2755,7	1,92290	6,7675
159	6,0211	908,48	3,1788	671,31	2756,8	1,93292	6,7589
160	6,1766	907,50	3,2564	675,65	2758,0	1,94293	6,7503
161	6,3353	906,52	3,3354	680,00	2759,1	1,95291	6,7417
162	6,4973	905,54	3,4160	684,35	2760,1	1,96289	6,7332
163	6,6625	904,55	3,4981	688,71	2761,2	1,97284	6,7247
164	6,8310	903,56	3,5817	693,07	2762,3	1,98278	6,7162

T_{sat} °C	p (bar)	ρ_L (kg/m ³)	ρ_V (kg/m ³)	h_L (kJ/kg)	h_V (kJ/kg)	s_L (kJ/kg/K)	s_V (kJ/kg/K)
165	7,0029	902,56	3,6670	697,43	2763,3	1,99270	6,7078
166	7,1783	901,56	3,7539	701,79	2764,4	2,00261	6,6994
167	7,3571	900,55	3,8425	706,16	2765,4	2,01250	6,6910
168	7,5394	899,54	3,9327	710,53	2766,4	2,02237	6,6827
169	7,7252	898,53	4,0246	714,90	2767,5	2,03223	6,6744
170	7,9147	897,51	4,1182	719,28	2768,5	2,04207	6,6662
171	8,1079	896,48	4,2135	723,66	2769,4	2,05190	6,6579
172	8,3047	895,46	4,3106	728,05	2770,4	2,06171	6,6497
173	8,5053	894,42	4,4095	732,44	2771,4	2,07150	6,6416
174	8,7098	893,39	4,5102	736,83	2772,3	2,08128	6,6335
175	8,9181	892,34	4,6128	741,22	2773,3	2,09105	6,6254
176	9,1303	891,30	4,7172	745,62	2774,2	2,10080	6,6173
177	9,3464	890,25	4,8235	750,02	2775,1	2,11053	6,6092
178	9,5666	889,19	4,9317	754,43	2776,0	2,12025	6,6012
179	9,7909	888,13	5,0418	758,84	2776,9	2,12996	6,5932
180	10,019	887,06	5,154	763,25	2777,8	2,13965	6,5853
181	10,252	885,99	5,268	767,67	2778,7	2,14933	6,5773
182	10,489	884,92	5,384	772,09	2779,5	2,15900	6,5694
183	10,730	883,84	5,502	776,51	2780,3	2,16865	6,5616
184	10,975	882,76	5,623	780,94	2781,2	2,17828	6,5537
185	11,225	881,67	5,745	785,37	2782,0	2,18791	6,5459
186	11,479	880,57	5,870	789,81	2782,8	2,19752	6,5381
187	11,738	879,47	5,996	794,25	2783,6	2,20712	6,5303
188	12,001	878,37	6,125	798,70	2784,3	2,21670	6,5226
189	12,269	877,26	6,256	803,14	2785,1	2,22627	6,5148
190	12,542	876,15	6,390	807,60	2785,8	2,23583	6,5071
191	12,819	875,03	6,525	812,06	2786,6	2,24538	6,4994
192	13,101	873,91	6,663	816,52	2787,3	2,25491	6,4918
193	13,388	872,78	6,804	820,98	2788,0	2,26443	6,4841
194	13,680	871,65	6,946	825,46	2788,7	2,27394	6,4765
195	13,977	870,51	7,091	829,93	2789,4	2,28344	6,4689
196	14,278	869,37	7,239	834,41	2790,0	2,29293	6,4613
197	14,585	868,22	7,389	838,90	2790,7	2,30240	6,4538
198	14,897	867,07	7,541	843,39	2791,3	2,31187	6,4463
199	15,214	865,91	7,696	847,88	2791,9	2,32132	6,4387
200	15,537	864,74	7,854	852,38	2792,5	2,33076	6,4312
201	15,864	863,58	8,014	856,89	2793,1	2,34019	6,4238
202	16,197	862,40	8,177	861,40	2793,7	2,34961	6,4163
203	16,536	861,22	8,343	865,91	2794,2	2,35902	6,4089
204	16,880	860,04	8,511	870,43	2794,8	2,36842	6,4014
205	17,229	858,85	8,682	874,96	2795,3	2,37781	6,3940
206	17,584	857,65	8,856	879,49	2795,8	2,38718	6,3866
207	17,945	856,45	9,033	884,02	2796,3	2,39655	6,3793
208	18,311	855,25	9,213	888,56	2796,8	2,40591	6,3719
209	18,684	854,03	9,395	893,11	2797,3	2,41526	6,3646
210	19,062	852,82	9,581	897,66	2797,7	2,42460	6,3572
211	19,446	851,60	9,769	902,22	2798,1	2,43393	6,3499
212	19,836	850,37	9,961	906,78	2798,6	2,44325	6,3426
213	20,232	849,13	10,155	911,35	2799,0	2,45257	6,3353
214	20,634	847,89	10,353	915,93	2799,3	2,46187	6,3280
215	21,042	846,65	10,554	920,51	2799,7	2,47117	6,3208
216	21,457	845,40	10,758	925,10	2800,1	2,48045	6,3135
217	21,878	844,14	10,965	929,69	2800,4	2,48973	6,3063
218	22,305	842,88	11,175	934,29	2800,7	2,49900	6,2991
219	22,738	841,61	11,389	938,90	2801,0	2,50827	6,2919

T_{sat} °C	p (bar)	ρ_L (kg/m ³)	ρ_V (kg/m ³)	h_L (kJ/kg)	h_V (kJ/kg)	s_L (kJ/kg/K)	s_V (kJ/kg/K)
220	23,179	840,34	11,607	943,51	2801,3	2,51752	6,2847
221	23,625	839,06	11,827	948,13	2801,5	2,52677	6,2775
222	24,078	837,77	12,051	952,75	2801,8	2,53601	6,2703
223	24,538	836,48	12,279	957,38	2802,0	2,54525	6,2631
224	25,005	835,18	12,510	962,02	2802,2	2,55448	6,2560
225	25,479	833,87	12,745	966,67	2802,4	2,56370	6,2488
226	25,959	832,56	12,984	971,32	2802,6	2,57291	6,2417
227	26,446	831,25	13,226	975,98	2802,7	2,58212	6,2345
228	26,941	829,92	13,472	980,65	2802,9	2,59132	6,2274
229	27,442	828,59	13,722	985,32	2803,0	2,60052	6,2203
230	27,951	827,26	13,976	990,00	2803,1	2,60971	6,2132
231	28,467	825,91	14,233	994,69	2803,2	2,61889	6,2060
232	28,990	824,56	14,495	999,39	2803,2	2,62807	6,1989
233	29,521	823,21	14,760	1004,09	2803,3	2,63725	6,1919
234	30,059	821,84	15,030	1008,80	2803,3	2,64642	6,1848
235	30,604	820,47	15,304	1013,52	2803,3	2,65558	6,1777
236	31,157	819,10	15,582	1018,25	2803,3	2,66474	6,1706
237	31,718	817,71	15,865	1022,98	2803,2	2,67390	6,1635
238	32,286	816,32	16,151	1027,72	2803,1	2,68305	6,1564
239	32,863	814,93	16,443	1032,48	2803,1	2,69220	6,1494
240	33,447	813,52	16,738	1037,24	2803,0	2,70135	6,1423
241	34,039	812,11	17,038	1042,00	2802,8	2,71049	6,1352
242	34,639	810,69	17,343	1046,78	2802,7	2,71962	6,1282
243	35,247	809,27	17,653	1051,57	2802,5	2,72876	6,1211
244	35,863	807,83	17,967	1056,36	2802,3	2,73789	6,1141
245	36,488	806,39	18,286	1061,16	2802,1	2,74702	6,1070
246	37,121	804,94	18,610	1065,98	2801,9	2,75615	6,0999
247	37,762	803,49	18,938	1070,80	2801,7	2,76527	6,0929
248	38,412	802,02	19,272	1075,63	2801,4	2,77440	6,0858
249	39,070	800,55	19,611	1080,47	2801,1	2,78352	6,0788
250	39,737	799,07	19,955	1085,32	2800,8	2,79264	6,0717
251	40,412	797,59	20,305	1090,18	2800,4	2,80176	6,0646
252	41,096	796,09	20,659	1095,05	2800,0	2,81088	6,0576
253	41,789	794,59	21,019	1099,93	2799,7	2,81999	6,0505
254	42,491	793,07	21,385	1104,82	2799,2	2,82911	6,0434
255	43,202	791,55	21,756	1109,72	2798,8	2,83823	6,0363
256	43,922	790,03	22,133	1114,63	2798,3	2,84734	6,0293
257	44,651	788,49	22,516	1119,55	2797,9	2,85646	6,0222
258	45,390	786,94	22,904	1124,48	2797,3	2,86558	6,0151
259	46,137	785,39	23,299	1129,43	2796,8	2,87470	6,0080
260	46,895	783,83	23,699	1134,38	2796,2	2,88382	6,0009
261	47,661	782,25	24,106	1139,34	2795,7	2,89294	5,9938
262	48,437	780,67	24,519	1144,32	2795,0	2,90206	5,9867
263	49,223	779,08	24,938	1149,31	2794,4	2,91118	5,9795
264	50,018	777,48	25,364	1154,31	2793,7	2,92031	5,9724
265	50,823	775,87	25,796	1159,32	2793,0	2,92944	5,9653
266	51,638	774,25	26,235	1164,35	2792,3	2,93857	5,9581
267	52,463	772,63	26,681	1169,38	2791,6	2,94771	5,9509
268	53,298	770,99	27,133	1174,43	2790,8	2,95685	5,9438
269	54,143	769,34	27,593	1179,49	2790,0	2,96599	5,9366
270	54,999	767,68	28,060	1184,57	2789,2	2,97514	5,9294
271	55,864	766,01	28,534	1189,66	2788,3	2,98429	5,9222
272	56,740	764,34	29,015	1194,76	2787,4	2,99345	5,9149
273	57,627	762,65	29,504	1199,87	2786,5	3,00261	5,9077
274	58,524	760,95	30,001	1205,00	2785,5	3,01177	5,9005

T_{sat} °C	p (bar)	ρ_L (kg/m ³)	ρ_V (kg/m ³)	h_L (kJ/kg)	h_V (kJ/kg)	s_L (kJ/kg/K)	s_V (kJ/kg/K)
275	59,431	759,24	30,506	1210,15	2784,6	3,02095	5,8932
276	60,350	757,52	31,018	1215,30	2783,6	3,03013	5,8859
277	61,279	755,78	31,538	1220,47	2782,5	3,03931	5,8786
278	62,219	754,04	32,067	1225,66	2781,4	3,04850	5,8713
279	63,170	752,28	32,604	1230,86	2780,3	3,05770	5,8640
280	64,132	750,52	33,150	1236,08	2779,2	3,06691	5,8566
281	65,105	748,74	33,704	1241,31	2778,0	3,07612	5,8492
282	66,089	746,95	34,268	1246,56	2776,8	3,08535	5,8418
283	67,085	745,14	34,840	1251,82	2775,6	3,09458	5,8344
284	68,092	743,33	35,421	1257,10	2774,3	3,10382	5,8270
285	69,111	741,50	36,012	1262,40	2773,0	3,11307	5,8195
286	70,141	739,66	36,613	1267,71	2771,7	3,12234	5,8120
287	71,183	737,81	37,223	1273,04	2770,3	3,13161	5,8045
288	72,237	735,94	37,843	1278,39	2768,9	3,14089	5,7970
289	73,303	734,06	38,474	1283,75	2767,4	3,15019	5,7894
290	74,380	732,16	39,115	1289,14	2765,9	3,15949	5,7819
291	75,470	730,26	39,766	1294,54	2764,4	3,16881	5,7742
292	76,572	728,33	40,429	1299,96	2762,8	3,17815	5,7666
293	77,686	726,40	41,102	1305,40	2761,2	3,18750	5,7589
294	78,813	724,44	41,787	1310,86	2759,6	3,19686	5,7512
295	79,952	722,48	42,483	1316,34	2757,9	3,20623	5,7435
296	81,103	720,50	43,192	1321,84	2756,1	3,21562	5,7357
297	82,268	718,50	43,912	1327,36	2754,4	3,22503	5,7279
298	83,445	716,48	44,645	1332,90	2752,6	3,23446	5,7201
299	84,635	714,45	45,390	1338,47	2750,7	3,24390	5,7122
300	85,838	712,41	46,148	1344,05	2748,8	3,25336	5,7043
301	87,054	710,34	46,920	1349,66	2746,8	3,26284	5,6963
302	88,283	708,26	47,705	1355,29	2744,8	3,27233	5,6883
303	89,526	706,17	48,504	1360,95	2742,8	3,28185	5,6803
304	90,782	704,05	49,317	1366,63	2740,7	3,29139	5,6722
305	92,051	701,91	50,14	1372,33	2738,6	3,30095	5,6641
306	93,334	699,76	50,99	1378,06	2736,4	3,31054	5,6559
307	94,631	697,59	51,85	1383,81	2734,1	3,32014	5,6477
308	95,942	695,40	52,72	1389,59	2731,8	3,32977	5,6394
309	97,267	693,18	53,61	1395,40	2729,5	3,33943	5,6311
310	98,605	690,95	54,52	1401,23	2727,1	3,34911	5,6228
311	99,958	688,70	55,44	1407,10	2724,6	3,35882	5,6143
312	101,326	686,42	56,38	1412,99	2722,1	3,36856	5,6058
313	102,707	684,12	57,34	1418,91	2719,6	3,37832	5,5973
314	104,104	681,80	58,32	1424,86	2716,9	3,38812	5,5887
315	105,51	679,46	59,31	1430,84	2714,2	3,39795	5,5800
316	106,94	677,09	60,33	1436,86	2711,5	3,40781	5,5713
317	108,38	674,69	61,37	1442,91	2708,7	3,41770	5,5625
318	109,84	672,28	62,42	1448,99	2705,8	3,42763	5,5537
319	111,31	669,83	63,50	1455,10	2702,8	3,43760	5,5447
320	112,79	667,36	64,60	1461,26	2699,8	3,44761	5,5357
321	114,30	664,86	65,73	1467,44	2696,7	3,45765	5,5266
322	115,81	662,34	66,87	1473,67	2693,6	3,46774	5,5175
323	117,34	659,78	68,05	1479,93	2690,3	3,47786	5,5082
324	118,89	657,19	69,24	1486,24	2687,0	3,48804	5,4989
325	120,46	654,58	70,46	1492,58	2683,6	3,49826	5,4895
326	122,04	651,93	71,71	1498,97	2680,1	3,50852	5,4799
327	123,64	649,25	72,99	1505,41	2676,6	3,51884	5,4703
328	125,25	646,53	74,30	1511,88	2672,9	3,52921	5,4606
329	126,88	643,78	75,63	1518,41	2669,2	3,53964	5,4508

T_{sat} °C	p (bar)	ρ_L (kg/m ³)	ρ_V (kg/m ³)	h_L (kJ/kg)	h_V (kJ/kg)	s_L (kJ/kg/K)	s_V (kJ/kg/K)
330	128,53	641,0	77,00	1525,0	2665,4	3,5501	5,4409
331	130,19	638,2	78,40	1531,6	2661,5	3,5607	5,4309
332	131,87	635,3	79,83	1538,3	2657,5	3,5713	5,4207
333	133,57	632,4	81,30	1545,0	2653,4	3,5819	5,4104
334	135,28	629,4	82,80	1551,8	2649,1	3,5927	5,4000
335	137,01	626,5	84,34	1558,6	2644,8	3,6035	5,3895
336	138,76	623,4	85,92	1565,6	2640,4	3,6144	5,3788
337	140,53	620,3	87,54	1572,5	2635,8	3,6253	5,3680
338	142,32	617,2	89,21	1579,6	2631,1	3,6364	5,3571
339	144,12	614,0	90,92	1586,7	2626,3	3,6475	5,3459
340	145,94	610,8	92,68	1593,8	2621,4	3,6587	5,3347
341	147,78	607,5	94,48	1601,1	2616,3	3,6701	5,3232
342	149,64	604,1	96,34	1608,4	2611,1	3,6815	5,3115
343	151,52	600,7	98,26	1615,8	2605,8	3,6930	5,2997
344	153,42	597,2	100,23	1623,3	2600,3	3,7047	5,2877
345	155,33	593,7	102,26	1630,9	2594,6	3,7164	5,2754
346	157,27	590,0	104,36	1638,6	2588,8	3,7283	5,2629
347	159,22	586,3	106,53	1646,4	2582,7	3,7404	5,2502
348	161,20	582,5	108,77	1654,3	2576,5	3,7526	5,2372
349	163,20	578,7	111,08	1662,3	2570,1	3,7649	5,2240
350	165,21	574,7	113,48	1670,4	2563,5	3,7774	5,2105
351	167,25	570,6	115,97	1678,7	2556,6	3,7901	5,1966
352	169,31	566,5	118,55	1687,1	2549,5	3,8030	5,1825
353	171,39	562,2	121,23	1695,7	2542,2	3,8160	5,1680
354	173,49	557,8	124,03	1704,4	2534,6	3,8294	5,1531
355	175,61	553,2	126,94	1713,3	2526,7	3,8429	5,1378
356	177,75	548,6	129,98	1722,4	2518,4	3,8567	5,1220
357	179,92	543,7	133,16	1731,6	2509,9	3,8708	5,1058
358	182,11	538,7	136,50	1741,2	2500,9	3,8853	5,0891
359	184,32	533,5	140,01	1750,9	2491,6	3,9001	5,0717
360	186,55	528,1	143,71	1760,9	2481,8	3,9153	5,0538
361	188,81	522,5	147,62	1771,3	2471,5	3,9309	5,0351
362	191,10	516,6	151,77	1782,0	2460,7	3,9470	5,0156
363	193,40	510,5	156,19	1793,0	2449,2	3,9638	4,9952
364	195,74	504,0	160,92	1804,6	2437,1	3,9811	4,9738
365,0	198,10	497,1	166,02	1816,6	2424,1	3,9993	4,9512
365,5	199,28	493,5	168,73	1822,8	2417,2	4,0087	4,9394
366,0	200,48	489,7	171,56	1829,2	2410,1	4,0183	4,9271
366,5	201,68	485,9	174,52	1835,8	2402,7	4,0282	4,9144
367,0	202,89	481,9	177,63	1842,6	2395,0	4,0385	4,9013
367,5	204,11	477,7	180,90	1849,7	2386,9	4,0490	4,8876
368,0	205,33	473,3	184,36	1856,9	2378,4	4,0600	4,8733
368,5	206,56	468,7	188,02	1864,5	2369,5	4,0714	4,8583
369,0	207,80	463,9	191,94	1872,4	2360,0	4,0833	4,8426
369,5	209,05	458,8	196,14	1880,7	2349,9	4,0958	4,8258
370,0	210,30	453,4	200,68	1889,5	2339,0	4,1090	4,8080
370,5	211,56	447,5	205,65	1898,8	2327,3	4,1231	4,7888
371,0	212,83	441,0	211,16	1908,9	2314,4	4,1384	4,7678
371,5	214,11	433,9	217,36	1920,0	2299,9	4,1551	4,7444
372,0	215,39	425,8	224,55	1932,4	2283,4	4,1738	4,7179
372,5	216,69	416,1	233,2	1946,8	2263,7	4,1957	4,6865
373,0	217,99	403,8	244,7	1964,8	2238,1	4,2230	4,6461
373,5	219,31	385,0	259,0	1991,6	2207,4	4,2640	4,5977
373,976	220,55	322,0	322,0	2085,8	2085,8	4,4090	4,4091

C.2 Propriétés physiques

Les propriétés physique de l'eau et de certains fluides courants sont disponibles dans de nombreuses tables comme celles de Irvine & Liley (1984), Schmidt (1982) ou de Haar *et al.* (1984). Ces auteurs fournissent également des formules qui permettent de calculer les propriétés désirées.

Dans les tables qui suivent, on fournit pour l'eau et sa vapeur, aux conditions de saturation les quantités suivantes calculées par les expressions données par Haar *et al.* (1984),

- la tension de surface entre l'eau liquide et sa vapeur en mPa m,
- la viscosité dynamique en $\mu\text{Pa s}$,
- la capacité thermique massique à pression constante en kJ/kg/K ,
- la conductivité thermique en mW/m/K et
- le nombre de Prandtl défini par

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{C.1})$$

où ν et α sont respectivement la viscosité cinématique et la diffusivité thermique.

T_{sat} (°C)	σ (mPa m)	μ_L (μ Pa s)	C_{pL} (J/kg/K)	k_L (mW/m/K)	Pr_L	μ_V (μ Pa s)	C_{pV} (J/kg/K)	k_V (mW/m/K)	Pr_V
0,01	75,65	1791	4229	561,0	13,50	9,22	1868	17,07	1,008
1	75,51	1732	4221	562,9	12,99	9,24	1868	17,12	1,008
2	75,37	1675	4215	564,8	12,50	9,26	1869	17,18	1,008
3	75,23	1620	4209	566,7	12,03	9,29	1869	17,23	1,008
4	75,09	1569	4204	568,6	11,60	9,31	1870	17,28	1,007
5	74,95	1520	4200	570,5	11,19	9,34	1871	17,34	1,007
6	74,80	1473	4197	572,4	10,80	9,36	1871	17,39	1,007
7	74,66	1429	4194	574,3	10,43	9,38	1872	17,45	1,007
8	74,51	1387	4192	576,2	10,09	9,41	1872	17,51	1,007
9	74,37	1346	4190	578,1	9,757	9,44	1873	17,56	1,006
10	74,22	1308	4188	580,0	9,443	9,46	1874	17,62	1,006
11	74,08	1271	4187	581,9	9,145	9,49	1875	17,68	1,006
12	73,93	1236	4186	583,8	8,862	9,51	1875	17,74	1,006
13	73,79	1202	4185	585,6	8,592	9,54	1876	17,80	1,006
14	73,64	1170	4185	587,5	8,334	9,56	1877	17,86	1,005
15	73,49	1139	4184	589,3	8,088	9,59	1878	17,92	1,005
16	73,34	1110	4184	591,2	7,853	9,62	1879	17,98	1,005
17	73,19	1081	4184	593,0	7,628	9,65	1879	18,04	1,005
18	73,04	1054	4183	594,8	7,413	9,67	1880	18,10	1,005
19	72,89	1028	4183	596,6	7,207	9,70	1881	18,16	1,005
20	72,74	1003	4183	598,4	7,010	9,73	1882	18,23	1,004
21	72,59	979	4183	600,2	6,821	9,75	1883	18,29	1,004
22	72,44	955	4183	602,0	6,640	9,78	1884	18,35	1,004
23	72,28	933	4183	603,7	6,466	9,81	1885	18,42	1,004
24	72,13	912	4183	605,4	6,299	9,84	1886	18,48	1,004
25	71,98	891	4183	607,1	6,138	9,87	1887	18,55	1,004
26	71,82	871	4183	608,8	5,984	9,89	1888	18,62	1,003
27	71,67	852	4183	610,5	5,835	9,92	1889	18,68	1,003
28	71,51	833	4183	612,2	5,693	9,95	1890	18,75	1,003
29	71,35	815	4183	613,8	5,555	9,98	1891	18,82	1,003
30	71,20	798	4183	615,4	5,423	10,01	1892	18,89	1,003
31	71,04	781	4183	617,0	5,295	10,04	1893	18,95	1,003
32	70,88	765	4183	618,6	5,172	10,07	1894	19,02	1,003
33	70,72	749	4183	620,2	5,054	10,10	1896	19,09	1,002
34	70,57	734	4183	621,7	4,940	10,13	1897	19,16	1,002
35	70,41	720	4183	623,3	4,829	10,16	1898	19,23	1,002
36	70,25	705	4183	624,8	4,723	10,19	1899	19,31	1,002
37	70,09	692	4183	626,2	4,620	10,22	1900	19,38	1,002
38	69,92	678	4183	627,7	4,521	10,25	1902	19,45	1,002
39	69,76	666	4183	629,1	4,425	10,28	1903	19,52	1,002
40	69,60	653	4182	630,6	4,332	10,31	1904	19,60	1,002
41	69,44	641	4182	631,9	4,243	10,34	1906	19,67	1,002
42	69,27	629	4182	633,3	4,156	10,37	1907	19,75	1,001
43	69,11	618	4182	634,7	4,072	10,40	1909	19,82	1,001
44	68,95	607	4182	636,0	3,991	10,43	1910	19,90	1,001
45	68,78	596	4182	637,3	3,912	10,46	1912	19,97	1,001
46	68,62	586	4182	638,6	3,836	10,49	1913	20,05	1,001
47	68,45	576	4182	639,9	3,763	10,52	1915	20,13	1,001
48	68,28	566	4182	641,1	3,691	10,55	1916	20,21	1,001
49	68,12	556	4182	642,3	3,622	10,59	1918	20,28	1,001
50	67,95	547,1	4182	643,5	3,555	10,62	1919	20,36	1,001
51	67,78	538,0	4182	644,7	3,490	10,65	1921	20,44	1,001
52	67,61	529,3	4182	645,9	3,427	10,68	1923	20,52	1,001
53	67,44	520,7	4182	647,0	3,366	10,71	1924	20,60	1,000
54	67,27	512,4	4182	648,1	3,306	10,74	1926	20,69	1,000

T_{sat} (°C)	σ (mPa m)	μ_L (μ Pa s)	C_{pL} (J/kg/K)	k_L (mW/m/K)	Pr_L	μ_V (μ Pa s)	C_{pV} (J/kg/K)	k_V (mW/m/K)	Pr_V
55	67,10	504,3	4182	649,2	3,249	10,77	1928	20,77	1,000
56	66,93	496,4	4182	650,3	3,193	10,81	1930	20,85	1,000
57	66,76	488,7	4182	651,3	3,138	10,84	1932	20,93	1,000
58	66,59	481,2	4182	652,3	3,085	10,87	1933	21,02	1,000
59	66,42	473,9	4183	653,3	3,034	10,90	1935	21,10	1,000
60	66,24	466,8	4183	654,3	2,984	10,94	1937	21,19	1,000
61	66,07	459,9	4183	655,3	2,936	10,97	1939	21,27	1,000
62	65,90	453,1	4183	656,2	2,888	11,00	1941	21,36	1,000
63	65,72	446,5	4184	657,2	2,843	11,03	1943	21,44	1,000
64	65,55	440,1	4184	658,1	2,798	11,07	1945	21,53	1,000
65	65,37	433,8	4184	658,9	2,755	11,10	1947	21,62	1,000
66	65,19	427,6	4185	659,8	2,712	11,13	1949	21,71	1,000
67	65,02	421,6	4185	660,7	2,671	11,16	1952	21,80	1,000
68	64,84	415,8	4186	661,5	2,631	11,20	1954	21,88	1,000
69	64,66	410,1	4186	662,3	2,592	11,23	1956	21,98	0,999
70	64,49	404,5	4187	663,1	2,554	11,26	1958	22,07	0,999
71	64,31	399,0	4188	663,9	2,517	11,30	1960	22,16	0,999
72	64,13	393,7	4188	664,6	2,481	11,33	1963	22,25	0,999
73	63,95	388,5	4189	665,3	2,446	11,36	1965	22,34	0,999
74	63,77	383,4	4189	666,1	2,411	11,39	1968	22,44	0,999
75	63,59	378,4	4190	666,8	2,378	11,43	1970	22,53	0,999
76	63,41	373,5	4191	667,4	2,345	11,46	1972	22,62	0,999
77	63,23	368,8	4192	668,1	2,314	11,49	1975	22,72	0,999
78	63,04	364,1	4193	668,8	2,282	11,53	1977	22,82	0,999
79	62,86	359,5	4193	669,4	2,252	11,56	1980	22,91	0,999
80	62,68	355,0	4194	670,0	2,223	11,60	1983	23,01	0,999
81	62,49	350,7	4195	670,6	2,194	11,63	1985	23,11	0,999
82	62,31	346,4	4196	671,2	2,165	11,66	1988	23,20	0,999
83	62,13	342,2	4197	671,7	2,138	11,70	1991	23,30	0,999
84	61,94	338,1	4198	672,3	2,111	11,73	1994	23,40	0,999
85	61,76	334,0	4199	672,8	2,085	11,76	1996	23,50	0,999
86	61,57	330,1	4200	673,3	2,059	11,80	1999	23,61	0,999
87	61,38	326,2	4201	673,8	2,034	11,83	2002	23,71	0,999
88	61,20	322,4	4202	674,3	2,009	11,87	2005	23,81	0,999
89	61,01	318,7	4203	674,8	1,985	11,90	2008	23,91	0,999
90	60,82	315,1	4204	675,3	1,962	11,93	2011	24,02	0,999
91	60,63	311,5	4206	675,7	1,939	11,97	2014	24,12	0,999
92	60,44	308,0	4207	676,1	1,916	12,00	2017	24,23	0,999
93	60,26	304,6	4208	676,6	1,894	12,04	2021	24,33	0,999
94	60,07	301,2	4209	677,0	1,873	12,07	2024	24,44	0,999
95	59,88	297,9	4210	677,4	1,852	12,10	2027	24,55	1,000
96	59,69	294,7	4212	677,7	1,831	12,14	2030	24,65	1,000
97	59,49	291,5	4213	678,1	1,811	12,17	2034	24,76	1,000
98	59,30	288,4	4214	678,5	1,791	12,21	2037	24,87	1,000
99	59,11	285,3	4216	678,8	1,772	12,24	2041	24,98	1,000
100	58,92	282,3	4217	679,1	1,753	12,28	2044	25,09	1,000
101	58,72	279,4	4218	679,4	1,735	12,31	2048	25,20	1,000
102	58,53	276,5	4220	679,7	1,716	12,34	2051	25,32	1,000
103	58,34	273,6	4221	680,0	1,699	12,38	2055	25,43	1,000
104	58,14	270,8	4223	680,3	1,681	12,41	2059	25,54	1,000
105	57,95	268,1	4224	680,6	1,664	12,45	2062	25,66	1,001
106	57,75	265,4	4226	680,8	1,647	12,48	2066	25,77	1,001
107	57,56	262,8	4227	681,1	1,631	12,52	2070	25,89	1,001
108	57,36	260,2	4229	681,3	1,615	12,55	2074	26,01	1,001
109	57,17	257,6	4230	681,5	1,599	12,59	2078	26,12	1,001

T_{sat} (°C)	σ (mPa m)	μ_L (μ Pa s)	C_{pL} (J/kg/K)	k_L (mW/m/K)	Pr_L	μ_V (μ Pa s)	C_{pV} (J/kg/K)	k_V (mW/m/K)	Pr_V
110	56,97	255,1	4232	681,7	1,584	12,62	2082	26,24	1,001
111	56,77	252,6	4233	681,9	1,568	12,66	2086	26,36	1,002
112	56,57	250,2	4235	682,1	1,553	12,69	2090	26,48	1,002
113	56,37	247,8	4237	682,3	1,539	12,72	2094	26,60	1,002
114	56,18	245,5	4238	682,4	1,525	12,76	2099	26,72	1,002
115	55,98	243,2	4240	682,6	1,510	12,79	2103	26,84	1,002
116	55,78	240,9	4242	682,7	1,497	12,83	2107	26,96	1,003
117	55,58	238,7	4243	682,9	1,483	12,86	2112	27,09	1,003
118	55,38	236,5	4245	683,0	1,470	12,90	2116	27,21	1,003
119	55,18	234,3	4247	683,1	1,457	12,93	2121	27,34	1,003
120	54,97	232,2	4249	683,2	1,444	12,97	2126	27,46	1,004
121	54,77	230,1	4250	683,3	1,432	13,00	2130	27,59	1,004
122	54,57	228,1	4252	683,4	1,419	13,04	2135	27,71	1,004
123	54,37	226,1	4254	683,5	1,407	13,07	2140	27,84	1,005
124	54,17	224,1	4256	683,5	1,395	13,11	2145	27,97	1,005
125	53,96	222,1	4258	683,6	1,384	13,14	2150	28,10	1,005
126	53,76	220,2	4260	683,6	1,372	13,18	2155	28,23	1,006
127	53,55	218,3	4262	683,7	1,361	13,21	2160	28,36	1,006
128	53,35	216,5	4264	683,7	1,350	13,25	2165	28,49	1,007
129	53,14	214,6	4265	683,7	1,339	13,28	2170	28,63	1,007
130	52,94	212,8	4267	683,7	1,328	13,32	2176	28,76	1,007
131	52,73	211,1	4269	683,7	1,318	13,35	2181	28,89	1,008
132	52,53	209,3	4271	683,7	1,308	13,39	2186	29,03	1,008
133	52,32	207,6	4274	683,7	1,298	13,42	2192	29,16	1,009
134	52,11	205,9	4276	683,7	1,288	13,46	2198	29,30	1,009
135	51,91	204,2	4278	683,6	1,278	13,49	2203	29,44	1,010
136	51,70	202,6	4280	683,6	1,268	13,53	2209	29,57	1,010
137	51,49	201,0	4282	683,5	1,259	13,56	2215	29,71	1,011
138	51,28	199,4	4284	683,5	1,250	13,60	2221	29,85	1,012
139	51,07	197,8	4286	683,4	1,241	13,63	2227	29,99	1,012
140	50,86	196,3	4288	683,3	1,232	13,67	2233	30,13	1,013
141	50,65	194,8	4291	683,2	1,223	13,70	2239	30,27	1,014
142	50,44	193,3	4293	683,2	1,214	13,74	2245	30,42	1,014
143	50,23	191,8	4295	683,0	1,206	13,77	2252	30,56	1,015
144	50,02	190,3	4298	682,9	1,198	13,81	2258	30,70	1,016
145	49,81	188,9	4300	682,8	1,189	13,84	2265	30,85	1,016
146	49,60	187,5	4302	682,7	1,181	13,88	2271	30,99	1,017
147	49,39	186,1	4305	682,5	1,174	13,91	2278	31,14	1,018
148	49,17	184,7	4307	682,4	1,166	13,95	2285	31,29	1,019
149	48,96	183,3	4309	682,2	1,158	13,98	2292	31,44	1,019
150	48,75	182,0	4312	682,1	1,151	14,02	2299	31,58	1,020
151	48,54	180,7	4314	681,9	1,143	14,05	2306	31,73	1,021
152	48,32	179,4	4317	681,7	1,136	14,09	2313	31,88	1,022
153	48,11	178,1	4320	681,5	1,129	14,12	2320	32,04	1,023
154	47,89	176,9	4322	681,3	1,122	14,16	2328	32,19	1,024
155	47,68	175,6	4325	681,1	1,115	14,19	2335	32,34	1,025
156	47,46	174,4	4327	680,9	1,108	14,23	2343	32,49	1,026
157	47,25	173,2	4330	680,7	1,102	14,26	2350	32,65	1,027
158	47,03	172,0	4333	680,5	1,095	14,30	2358	32,80	1,028
159	46,82	170,8	4336	680,2	1,089	14,33	2366	32,96	1,029
160	46,60	169,7	4339	680,0	1,082	14,37	2374	33,12	1,030
161	46,38	168,5	4341	679,7	1,076	14,40	2382	33,27	1,031
162	46,16	167,4	4344	679,5	1,070	14,44	2390	33,43	1,032
163	45,95	166,3	4347	679,2	1,064	14,48	2398	33,59	1,034
164	45,73	165,2	4350	678,9	1,058	14,51	2407	33,75	1,035

T_{sat} (°C)	σ (mPa m)	μ_L (μPa s)	C_{pL} (J/kg/K)	k_L (mW/m/K)	Pr_L	μ_V (μPa s)	C_{pV} (J/kg/K)	k_V (mW/m/K)	Pr_V
165	45,51	164,1	4353	678,6	1,052	14,55	2415	33,91	1,036
166	45,29	163,0	4356	678,4	1,047	14,58	2424	34,07	1,037
167	45,07	162,0	4359	678,1	1,041	14,62	2433	34,23	1,039
168	44,85	160,9	4362	677,7	1,036	14,65	2442	34,40	1,040
169	44,63	159,9	4366	677,4	1,030	14,69	2451	34,56	1,041
170	44,41	158,9	4369	677,1	1,025	14,72	2460	34,73	1,043
171	44,19	157,9	4372	676,8	1,020	14,76	2469	34,89	1,044
172	43,97	156,9	4375	676,4	1,015	14,79	2478	35,06	1,046
173	43,75	155,9	4379	676,1	1,010	14,83	2488	35,23	1,047
174	43,53	154,9	4382	675,7	1,005	14,86	2497	35,39	1,049
175	43,31	154,0	4385	675,3	1,000	14,90	2507	35,56	1,050
176	43,09	153,0	4389	675,0	0,995	14,93	2517	35,73	1,052
177	42,87	152,1	4392	674,6	0,991	14,97	2527	35,90	1,053
178	42,64	151,2	4396	674,2	0,986	15,00	2537	36,07	1,055
179	42,42	150,3	4400	673,8	0,981	15,04	2547	36,25	1,057
180	42,20	149,4	4403	673,4	0,977	15,07	2558	36,42	1,059
181	41,98	148,5	4407	673,0	0,973	15,11	2568	36,59	1,060
182	41,75	147,7	4411	672,5	0,968	15,14	2579	36,77	1,062
183	41,53	146,8	4415	672,1	0,964	15,18	2590	36,94	1,064
184	41,30	145,9	4419	671,7	0,960	15,21	2601	37,12	1,066
185	41,08	145,1	4423	671,2	0,956	15,25	2612	37,30	1,068
186	40,86	144,3	4427	670,7	0,952	15,28	2623	37,47	1,070
187	40,63	143,5	4431	670,3	0,948	15,32	2634	37,65	1,072
188	40,41	142,6	4435	669,8	0,944	15,35	2646	37,83	1,074
189	40,18	141,8	4439	669,3	0,941	15,39	2658	38,01	1,076
190	39,95	141,0	4443	668,8	0,937	15,42	2670	38,19	1,078
191	39,73	140,3	4447	668,3	0,933	15,46	2682	38,38	1,080
192	39,50	139,5	4452	667,8	0,930	15,50	2694	38,56	1,083
193	39,28	138,7	4456	667,3	0,926	15,53	2706	38,74	1,085
194	39,05	138,0	4461	666,8	0,923	15,57	2719	38,93	1,087
195	38,82	137,2	4465	666,2	0,920	15,60	2731	39,11	1,089
196	38,59	136,5	4470	665,7	0,916	15,64	2744	39,30	1,092
197	38,37	135,8	4475	665,1	0,913	15,67	2757	39,49	1,094
198	38,14	135,0	4479	664,5	0,910	15,71	2770	39,68	1,097
199	37,91	134,3	4484	664,0	0,907	15,74	2784	39,86	1,099
200	37,68	133,6	4489	663,4	0,904	15,78	2797	40,05	1,102
201	37,46	132,9	4494	662,8	0,901	15,81	2811	40,25	1,104
202	37,23	132,2	4499	662,2	0,898	15,85	2825	40,44	1,107
203	37,00	131,5	4504	661,6	0,896	15,88	2839	40,63	1,110
204	36,77	130,9	4509	661,0	0,893	15,92	2853	40,82	1,113
205	36,54	130,2	4515	660,3	0,890	15,96	2867	41,02	1,115
206	36,31	129,5	4520	659,7	0,887	15,99	2882	41,22	1,118
207	36,08	128,9	4525	659,1	0,885	16,03	2897	41,41	1,121
208	35,85	128,2	4531	658,4	0,882	16,06	2912	41,61	1,124
209	35,62	127,6	4536	657,7	0,880	16,10	2927	41,81	1,127
210	35,39	127,0	4542	657,1	0,878	16,13	2943	42,01	1,130
211	35,16	126,3	4548	656,4	0,875	16,17	2958	42,21	1,133
212	34,93	125,7	4554	655,7	0,873	16,20	2974	42,41	1,136
213	34,70	125,1	4560	655,0	0,871	16,24	2990	42,61	1,140
214	34,47	124,5	4566	654,3	0,869	16,28	3006	42,82	1,143
215	34,24	123,9	4572	653,5	0,867	16,31	3023	43,02	1,146
216	34,00	123,3	4578	652,8	0,865	16,35	3040	43,23	1,149
217	33,77	122,7	4584	652,1	0,863	16,38	3057	43,44	1,153
218	33,54	122,1	4591	651,3	0,861	16,42	3074	43,64	1,156
219	33,31	121,5	4597	650,5	0,859	16,45	3091	43,85	1,160

T_{sat} (°C)	σ (mPa m)	μ_L (μ Pa s)	C_{pL} (J/kg/K)	k_L (mW/m/K)	Pr_L	μ_V (μ Pa s)	C_{pV} (J/kg/K)	k_V (mW/m/K)	Pr_V
220	33,08	120,9	4604	649,8	0,857	16,49	3109	44,06	1,163
221	32,84	120,4	4610	649,0	0,855	16,53	3127	44,28	1,167
222	32,61	119,8	4617	648,2	0,853	16,56	3145	44,49	1,171
223	32,38	119,3	4624	647,4	0,852	16,60	3163	44,70	1,175
224	32,15	118,7	4631	646,6	0,850	16,63	3182	44,92	1,178
225	31,91	118,2	4638	645,7	0,849	16,67	3201	45,14	1,182
226	31,68	117,6	4645	644,9	0,847	16,71	3220	45,35	1,186
227	31,45	117,1	4653	644,0	0,846	16,74	3239	45,57	1,190
228	31,21	116,5	4660	643,2	0,844	16,78	3259	45,79	1,194
229	30,98	116,0	4667	642,3	0,843	16,81	3279	46,01	1,198
230	30,75	115,5	4675	641,4	0,842	16,85	3299	46,24	1,202
231	30,51	115,0	4683	640,5	0,840	16,89	3320	46,46	1,207
232	30,28	114,4	4691	639,6	0,839	16,92	3341	46,69	1,211
233	30,04	113,9	4699	638,7	0,838	16,96	3362	46,92	1,215
234	29,81	113,4	4707	637,8	0,837	17,00	3383	47,15	1,220
235	29,58	112,9	4715	636,9	0,836	17,03	3405	47,38	1,224
236	29,34	112,4	4724	635,9	0,835	17,07	3427	47,61	1,229
237	29,11	111,9	4732	634,9	0,834	17,11	3450	47,84	1,233
238	28,87	111,4	4741	634,0	0,833	17,14	3472	48,08	1,238
239	28,64	110,9	4750	633,0	0,833	17,18	3495	48,31	1,243
240	28,40	110,5	4759	632,0	0,832	17,22	3519	48,55	1,248
241	28,17	110,0	4768	631,0	0,831	17,26	3542	48,79	1,253
242	27,93	109,5	4777	630,0	0,830	17,29	3566	49,04	1,258
243	27,70	109,0	4786	628,9	0,830	17,33	3591	49,28	1,263
244	27,46	108,6	4796	627,9	0,829	17,37	3616	49,53	1,268
245	27,23	108,1	4806	626,8	0,829	17,40	3641	49,77	1,273
246	26,99	107,6	4816	625,8	0,828	17,44	3666	50,02	1,278
247	26,76	107,2	4826	624,7	0,828	17,48	3692	50,28	1,284
248	26,52	106,7	4836	623,6	0,828	17,52	3718	50,53	1,289
249	26,29	106,3	4846	622,5	0,827	17,55	3745	50,79	1,295
250	26,05	105,8	4857	621,3	0,827	17,59	3772	51,04	1,300
251	25,82	105,4	4867	620,2	0,827	17,63	3800	51,31	1,306
252	25,58	104,9	4878	619,1	0,827	17,67	3828	51,57	1,312
253	25,35	104,5	4889	617,9	0,827	17,71	3856	51,83	1,317
254	25,11	104,0	4901	616,7	0,827	17,75	3885	52,10	1,323
255	24,88	103,6	4912	615,5	0,827	17,78	3914	52,37	1,329
256	24,64	103,2	4924	614,3	0,827	17,82	3944	52,65	1,335
257	24,41	102,7	4936	613,1	0,827	17,86	3974	52,92	1,341
258	24,17	102,3	4948	611,9	0,827	17,90	4005	53,20	1,348
259	23,93	101,9	4960	610,6	0,828	17,94	4037	53,48	1,354
260	23,70	101,5	4973	609,4	0,828	17,98	4068	53,77	1,360
261	23,46	101,0	4985	608,1	0,828	18,02	4101	54,05	1,367
262	23,23	100,6	4998	606,8	0,829	18,06	4133	54,34	1,373
263	22,99	100,2	5012	605,5	0,829	18,10	4167	54,64	1,380
264	22,76	99,8	5025	604,2	0,830	18,14	4201	54,94	1,387
265	22,52	99,4	5039	602,9	0,831	18,18	4235	55,24	1,394
266	22,29	99,0	5053	601,6	0,831	18,22	4271	55,54	1,401
267	22,05	98,6	5067	600,2	0,832	18,26	4306	55,85	1,408
268	21,82	98,2	5081	598,8	0,833	18,30	4343	56,16	1,415
269	21,58	97,8	5096	597,4	0,834	18,34	4380	56,48	1,422
270	21,35	97,3	5111	596,0	0,835	18,38	4417	56,79	1,430
271	21,11	96,9	5127	594,6	0,836	18,42	4456	57,12	1,437
272	20,88	96,5	5142	593,2	0,837	18,46	4495	57,45	1,445
273	20,64	96,1	5158	591,8	0,838	18,50	4535	57,78	1,452
274	20,41	95,8	5174	590,3	0,839	18,54	4575	58,12	1,460

T_{sat} (°C)	σ (mPa m)	μ_L (μ Pa s)	C_{pL} (J/kg/K)	k_L (mW/m/K)	Pr_L	μ_V (μ Pa s)	C_{pV} (J/kg/K)	k_V (mW/m/K)	Pr_V
275	20,17	95,4	5191	588,8	0,841	18,59	4616	58,46	1,468
276	19,94	95,0	5208	587,3	0,842	18,63	4659	58,80	1,476
277	19,71	94,6	5225	585,8	0,844	18,67	4701	59,16	1,484
278	19,47	94,2	5243	584,3	0,845	18,71	4745	59,51	1,492
279	19,24	93,8	5261	582,8	0,847	18,76	4790	59,88	1,500
280	19,00	93,4	5279	581,2	0,848	18,80	4835	60,24	1,509
281	18,77	93,0	5298	579,7	0,850	18,84	4881	60,62	1,517
282	18,54	92,6	5317	578,1	0,852	18,89	4929	61,00	1,526
283	18,30	92,3	5336	576,5	0,854	18,93	4977	61,38	1,535
284	18,07	91,9	5356	574,9	0,856	18,98	5026	61,78	1,544
285	17,84	91,5	5377	573,3	0,858	19,02	5076	62,18	1,553
286	17,60	91,1	5397	571,7	0,860	19,07	5128	62,58	1,562
287	17,37	90,7	5419	570,0	0,862	19,11	5180	63,00	1,571
288	17,14	90,3	5440	568,4	0,865	19,16	5234	63,42	1,581
289	16,91	90,0	5463	566,7	0,867	19,20	5288	63,85	1,590
290	16,68	89,6	5485	565,0	0,870	19,25	5344	64,28	1,600
291	16,44	89,2	5509	563,3	0,872	19,30	5401	64,73	1,610
292	16,21	88,8	5533	561,6	0,875	19,34	5460	65,18	1,620
293	15,98	88,5	5557	559,9	0,878	19,39	5519	65,65	1,630
294	15,75	88,1	5582	558,1	0,881	19,44	5581	66,12	1,641
295	15,52	87,7	5608	556,4	0,884	19,49	5643	66,60	1,651
296	15,29	87,3	5634	554,6	0,887	19,54	5707	67,09	1,662
297	15,06	87,0	5661	552,8	0,891	19,58	5773	67,60	1,673
298	14,83	86,6	5688	551,0	0,894	19,63	5840	68,11	1,684
299	14,60	86,2	5717	549,2	0,897	19,68	5909	68,63	1,695
300	14,37	85,8	5746	547,4	0,901	19,74	5980	69,17	1,706
301	14,14	85,5	5775	545,6	0,905	19,79	6052	69,72	1,718
302	13,91	85,1	5806	543,7	0,909	19,84	6126	70,28	1,729
303	13,69	84,7	5837	541,9	0,913	19,89	6202	70,86	1,741
304	13,46	84,4	5870	540,0	0,917	19,94	6281	71,44	1,753
305	13,23	84,0	5903	538,2	0,921	20,00	6361	72,05	1,766
306	13,00	83,6	5937	536,3	0,926	20,05	6443	72,66	1,778
307	12,78	83,2	5972	534,4	0,930	20,11	6528	73,30	1,791
308	12,55	82,9	6008	532,5	0,935	20,16	6616	73,95	1,804
309	12,32	82,5	6045	530,6	0,940	20,22	6705	74,61	1,817
310	12,10	82,1	6084	528,7	0,945	20,28	6798	75,30	1,830
311	11,87	81,7	6123	526,7	0,950	20,33	6893	76,00	1,844
312	11,65	81,4	6164	524,8	0,956	20,39	6991	76,72	1,858
313	11,43	81,0	6206	522,9	0,961	20,45	7092	77,47	1,872
314	11,20	80,6	6249	520,9	0,967	20,51	7196	78,23	1,887
315	10,98	80,2	6294	519,0	0,973	20,57	7303	79,01	1,901
316	10,76	79,9	6340	517,0	0,979	20,63	7414	79,82	1,916
317	10,54	79,5	6388	515,0	0,986	20,70	7528	80,65	1,932
318	10,32	79,1	6438	513,0	0,993	20,76	7646	81,51	1,947
319	10,10	78,7	6489	511,1	1,000	20,82	7769	82,39	1,963
320	9,88	78,3	6542	509,1	1,007	20,89	7895	83,30	1,980
321	9,66	78,0	6597	507,1	1,014	20,96	8026	84,24	1,997
322	9,44	77,6	6654	505,1	1,022	21,03	8162	85,21	2,014
323	9,22	77,2	6713	503,1	1,030	21,09	8303	86,22	2,031
324	9,00	76,8	6775	501,1	1,039	21,17	8449	87,25	2,049
325	8,79	76,4	6839	499,1	1,047	21,24	8600	88,3	2,068
326	8,57	76,0	6906	497,0	1,056	21,31	8758	89,4	2,087
327	8,35	75,6	6975	495,0	1,066	21,38	8921	90,6	2,106
328	8,14	75,2	7047	493,0	1,076	21,46	9092	91,8	2,127
329	7,93	74,8	7123	491,0	1,086	21,54	9269	93,0	2,147

T_{sat} (°C)	σ (mPa m)	μ_L (μ Pa s)	C_{pL} (J/kg/K)	k_L (mW/m/K)	Pr_L	μ_V (μ Pa s)	C_{pV} (J/kg/K)	k_V (mW/m/K)	Pr_V
330	7,71	74,4	7201	488,9	1,097	21,62	9454	94,3	2,168
331	7,50	74,0	7284	486,9	1,108	21,70	9648	95,6	2,190
332	7,29	73,6	7370	484,9	1,119	21,78	9849	96,9	2,213
333	7,08	73,2	7460	482,8	1,132	21,87	10060	98,4	2,236
334	6,87	72,8	7555	480,8	1,144	21,95	10281	99,8	2,261
335	6,66	72,4	7655	478,7	1,158	22,04	10513	101,4	2,286
336	6,45	72,0	7759	476,7	1,172	22,13	10756	103,0	2,312
337	6,25	71,6	7869	474,6	1,187	22,23	11011	104,6	2,339
338	6,04	71,2	7986	472,6	1,202	22,32	11280	106,4	2,367
339	5,84	70,7	8109	470,5	1,219	22,42	11563	108,2	2,396
340	5,64	70,3	8238	468,5	1,236	22,52	11861	110,1	2,427
341	5,43	69,9	8376	466,4	1,255	22,62	12177	112,0	2,459
342	5,23	69,4	8522	464,3	1,274	22,73	12511	114,1	2,492
343	5,03	69,0	8678	462,2	1,295	22,84	12865	116,3	2,527
344	4,84	68,5	8844	460,2	1,317	22,96	13241	118,5	2,564
345	4,64	68,1	9021	458,1	1,341	23,07	13642	120,9	2,604
346	4,44	67,6	9210	456,0	1,366	23,19	14069	123,4	2,645
347	4,25	67,2	9414	453,9	1,393	23,32	14526	126,0	2,688
348	4,06	66,7	9633	451,8	1,422	23,45	15016	128,8	2,735
349	3,86	66,2	9869	449,7	1,453	23,58	15543	131,7	2,784
350	3,68	65,7	10126	447,7	1,486	23,72	16111	134,7	2,837
351	3,49	65,2	10404	445,6	1,523	23,87	16725	138,0	2,894
352	3,30	64,7	10707	443,5	1,562	24,02	17390	141,4	2,955
353	3,12	64,2	11039	441,4	1,605	24,18	18115	145,0	3,021
354	2,93	63,7	11405	439,3	1,652	24,35	18908	148,9	3,092
355	2,75	63,1	11808	437,3	1,704	24,52	19778	153,0	3,170
356	2,58	62,6	12256	435,2	1,762	24,70	20739	157,4	3,255
357	2,40	62,0	12757	433,2	1,825	24,89	21804	162,1	3,348
358	2,23	61,4	13319	431,2	1,897	25,10	22992	167,2	3,452
359	2,05	60,8	13957	429,3	1,977	25,31	24328	172,6	3,567
360	1,89	60,2	14684	427,5	2,068	25,54	25839	178,5	3,696
361	1,72	59,5	15522	425,7	2,171	25,78	27564	184,9	3,842
362	1,56	58,9	16498	424,1	2,291	26,04	29554	192,0	4,009
363	1,40	58,2	17648	422,6	2,430	26,32	31876	199,7	4,201
364	1,24	57,5	19024	421,3	2,595	26,62	34629	208,3	4,426
365	1,09	56,7	20701	420,4	2,792	26,95	37961	217,9	4,694
365,5	1,01	56,3	21684	420,1	2,907	27,13	39912	223,3	4,849
366	0,94	55,9	22788	419,9	3,034	27,31	42103	229,0	5,022
366,5	0,87	55,5	24037	419,8	3,176	27,51	44584	235,2	5,215
367	0,80	55,0	25461	420,0	3,337	27,71	47422	241,9	5,434
367,5	0,72	54,6	27104	420,4	3,520	27,93	50701	249,2	5,683
368	0,66	54,1	29021	421,1	3,730	28,16	54536	257,3	5,969
368,5	0,59	53,6	31292	422,1	3,975	28,41	59085	266,3	6,304
369	0,52	53,1	34031	423,7	4,266	28,68	64577	276,4	6,700
369,5	0,46	52,6	37407	425,9	4,617	28,97	71356	288,0	7,177
370	0,39	52,0	41682	429,1	5,051	29,29	79963	301,6	7,77
370,5	0,33	51,4	47290	433,5	5,604	29,64	91289	317,7	8,52
371	0,28	50,7	54975	439,7	6,338	30,03	106901	337,7	9,51
371,5	0,22	50,0	66180	449,0	7,362	30,48	129805	363,3	10,89
372	0,17	49,1	84050	463,7	8,902	31,00	166597	398,2	12,97
372,5	0,12	48,1	116982	489,7	11,496	31,65	235236	449,9	16,55
373	0,07	46,9	196949	549,7	16,794	32,52	410707	539,7	24,75
373,5	0,03	45,0	594514	935,2	28,596	33,65	946352	789,9	40,31
373,976	0,00	39,0	∞	∞	∞	39,00	∞	∞	∞

Annexe D

Prise en compte de la tension superficielle

D.1 Notion de tension de surface

La notion de tension d'une membrane ou d'une coque mécanique est d'abord introduite de façon élémentaire, puis en examinant l'équilibre d'une goutte d'eau attachée à une vitre, on met en évidence l'existence d'une tension de l'interface gaz liquide. On introduit cet effet dans le bilan de quantité de mouvement d'une portion finie de milieu diphasique et en utilisant un théorème de géométrie des surfaces on en déduit les relations de saut aux interfaces en présence de tension superficielle.

Ces théorèmes font apparaître les notions de gradient de surface et de courbure moyenne d'une surface. Ces quantités sont liées aux deux premières formes quadratiques fondamentales d'une surface. On rappellera les éléments de calcul pratique nécessaires à la détermination de ces grandeurs.

D.1.1 Tension d'une membrane mince

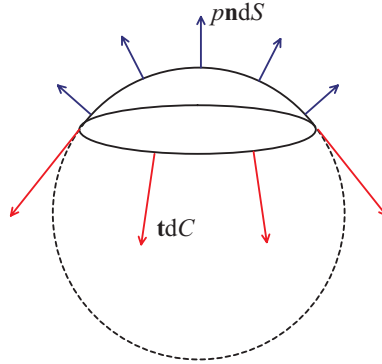


Figure D.1: Schéma décrivant l'équilibre statique d'un ballon de baudruche gonflé par un gaz.

Considérons la membrane mince d'un ballon de baudruche tendue sous l'effet de la pression interne (figure D.1). Isolons par la pensée la calotte sphérique représentée en traits pleins sur la même figure et considérons l'analyse de l'équilibre statique de cette portion de membrane.

La membrane subit l'effet de la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur du ballon. Soit p cette différence de pression. On rappelle que les coordonnées d'un point sur la surface s'expriment en coordonnées sphériques (voir figure D.2),

$$\mathbf{M}(\theta, \phi) = \begin{cases} x = R \cos \theta \sin \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ z = R \cos \phi \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

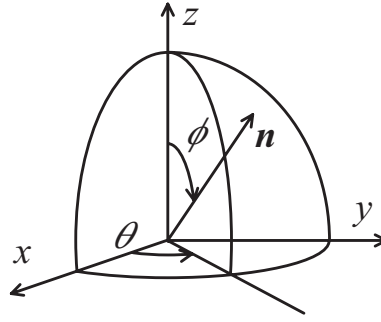


Figure D.2: Rappel des coordonnées sphériques.

Considérons un vecteur \mathbf{t} défini sur la surface de la sphère. Ses composantes en coordonnées sphériques sont définies par,

$$\mathbf{t} = t_r \mathbf{e}_r + t_\theta \mathbf{e}_\theta + t_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (\text{D.2})$$

où $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ est la base locale des coordonnées sphériques. La normale extérieure à la sphère est,

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r = \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \phi \mathbf{e}_z \quad (\text{D.3})$$

La résultante des efforts de pression sur la calotte sphérique est égale à,

$$\mathbf{F}_p = \int_0^\phi \int_0^{2\pi} p \mathbf{n} dS = 2\pi \mathbf{e}_z \int_0^\phi p \cos \phi R^2 \sin \phi d\phi = \pi R^2 p \sin^2 \phi \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.4})$$

La partie en pointillé de la sphère (figure D.1) exerce sur la calotte sphérique une tension \mathbf{t} appliquée sur la circonférence \mathcal{C} de base de la calotte. Sa résultante est,

$$\mathbf{F}_t = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{t} dC = \int_0^{2\pi} \mathbf{t} R \sin \phi d\theta. \quad (\text{D.5})$$

La sphère étant isotrope, les composantes en coordonnées sphériques de la tension sont uniformes. Si t_θ était non nul, un couple selon \mathbf{e}_z serait appliqué à la calotte sphérique. Les efforts de pression étant radiaux, leur moment selon \mathbf{e}_z est nul. t_θ est donc nul. On a donc

$$\mathbf{F}_t = \int_0^{2\pi} (t_r \mathbf{e}_r + t_\phi \mathbf{e}_\phi) R \sin \phi d\theta = 2\pi R \sin \phi (t_r \cos \phi - t_\phi \sin \phi) \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.6})$$

L'équilibre de la calotte s'exprime pour toute valeur de ϕ par,

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_t = 0. \quad (\text{D.7})$$

En rapprochant (D.4) et (D.6) on obtient,

$$t_r = 0 \quad (\text{D.8})$$

$$p = \frac{2t_\phi}{R}. \quad (\text{D.9})$$

La tension s'exerce dans le plan tangent à la surface dans une direction normale \mathbf{N} à l'élément de contour et dirigée vers l'extérieur de l'élément de surface. Son module est constant et est souvent dénommé σ . Le saut de pression et la tension de la surface sont liés par,

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{N} \quad (\text{D.10})$$

$$p = \frac{2\sigma}{R} \quad (\text{D.11})$$

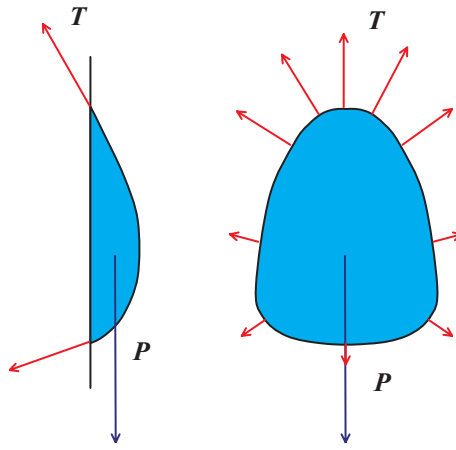


Figure D.3: Vue de coté et de face d'une goutte d'eau en équilibre sur la surface plane d'une vitre.

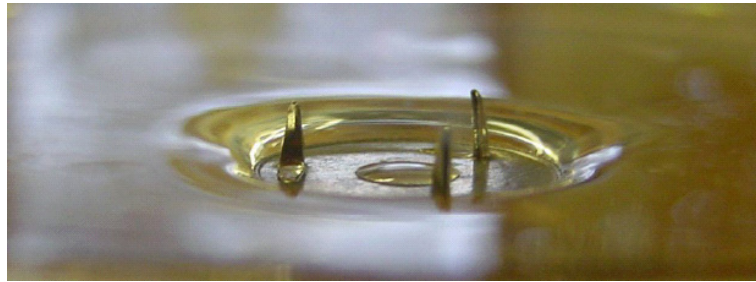


Figure D.4: Illustration de l'effet de la tension superficielle de l'eau. Une punaise à trois pointes reste en équilibre à la surface de l'eau retenue par la tension de surface de l'eau.

Comme on définit des contraintes dans un fluide on peut définir des tensions dans une membrane. Elles sont décrites par un tenseur de tensions. La tension superficielle est une des composantes de la partie isotrope du tenseur (qui ne dépend pas de l'orientation de l'élément de contour). Les contraintes dans un fluide immobile sont entièrement décrites par la pression. Dans une membrane à l'équilibre ou non dotée de viscosité de surface, les tensions sont entièrement décrites par la tension superficielle. La tension superficielle est donc pour une membrane, au signe près, l'analogue de la pression pour un fluide.

D.1.2 Goutte d'eau en équilibre sur un plan vertical

Observons attentivement, un jour de pluie, une goutte d'eau déposée sur une vitre (figure D.3).

Il est clair que son équilibre mécanique est impossible à considérer si on ne dote pas l'interface de propriétés mécaniques. La seule force permettant d'équilibrer le poids résulte nécessairement de la tension de l'interface ("la peau de l'eau") qui s'applique sur la paroi, le long de la ligne d'intersection entre l'interface et la paroi (la ligne triple).

Une goutte d'eau de condensation accrochée au plafond, des gouttes d'eau accrochées sur les feuilles après la pluie, ne doivent leur équilibre statique qu'à la tension superficielle. La figure D.4 montre bien le comportement de type membranaire de la surface libre de l'eau sur laquelle de petits objets peuvent rester accrochés par la tension de surface. Chacun a notamment déjà observé des insectes à longues pattes posés sur l'eau en équilibre. En conséquence la description d'un système mécanique comprenant des interfaces doit, en toute généralité, prendre en compte le tenseur des tensions et au minimum la tension de surface.

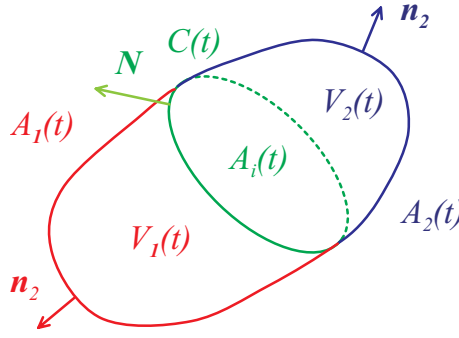


Figure D.5: Volume matériel diphasique comprenant une interface utilisé pour établir les équations de bilan. \mathbf{n}_k est la normale unitaire de la surface A_k dirigée vers l'extérieur du volume matériel.

D.2 Bilan de quantité de mouvement en présence de tension superficielle

On considère une interface sans masse mais dotée de propriétés mécaniques. On ne considère que la tension de surface. Les bilans de masse locaux dans les phases et à l'interface restent inchangés. On a,

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0. \quad (\text{D.12})$$

Considérons le volume matériel diphasique représenté à la figure D.5. Les forces appliquées au volume matériel sont de deux natures : internes ou de contact. L'interface n'ayant pas de masse, les forces internes ne s'appliquent que dans les phases. Les actions de contact sont en revanche de deux types : les contraintes appliquées au fluide par les surfaces entourant le volume matériel et les tensions appliquées à l'interface par son contour.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV &= \\ &= \int_{C(t)} \sigma \mathbf{N} dl + \sum_{k=1,2} \int_{A_k(t)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k dS + \sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \rho_k \mathbf{F}_k dV. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

où \mathbf{N} est la normale unitaire au contour $C(t)$ contenue dans le plan tangent de $A_i(t)$ et dirigée vers l'extérieur de $C(t)$ et l est l'abscisse curviligne le long de $C(t)$. Il existe également une règle de Leibniz et une expression du théorème de Gauss pour les surfaces (voir par exemple Aris, 1962, p. 225). Leurs démonstrations et leurs expressions sont impossibles sans prendre en compte précisément la courbure de la surface. On peut par exemple en trouver une définition accessible dans Coutris (1993). Toutefois leur expression générale nécessite des notions élémentaires d'algèbre tensorielle (voir notamment Aris, 1962, ch. 7). Le théorème de Gauss appliqué à l'intégrale de contour présente dans (D.13) s'écrit (voir par exemple Delhay, 1974),

$$\int_{C(t)} \sigma \mathbf{N} dl = \int_{A_i(t)} (\nabla_S \sigma - \mathbf{n} \sigma \nabla_S \cdot \mathbf{n}) dS \quad (\text{D.14})$$

où $\nabla_S \cdot$ est l'opérateur de divergence de surface et ∇_S est l'opérateur de gradient de surface. Lorsque la surface est une surface de coordonnées d'un des systèmes de coordonnées courants de l'espace euclidien comme par exemple les coordonnées cylindriques ou sphériques, les opérateurs de surface, appliqués aux scalaires ou aux vecteurs du plan tangent (2 coordonnées) sont identiques à la restriction sur la surface de leurs analogues volumiques. Ainsi sur une sphère, représentée en coordonnées sphériques par (r, θ, ϕ) , le gradient de surface d'une fonction $f(\theta, \phi)$, s'écrit

$$\nabla_S f = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (\text{D.15})$$

En appliquant au bilan sur le volume matériel (D.13), l'extension de la règle de Leibniz (3.38), le théorème de Gauss (3.20) sur les intégrales de surface sur A_k et la forme surfacique du théorème de Gauss (D.14) pour l'intégrale de contour sur $C(t)$, on obtient,

$$\sum_{k=1,2} \int_{V_k(t)} \left(\frac{\partial \rho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) - \nabla \cdot \mathbb{T}_k - \rho_k \mathbf{F}_k \right) dV - \int_{A_i(t)} \left[\sum_{k=1,2} (\rho_k \mathbf{v}_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{A_i}) \cdot \mathbf{n}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k) + (\nabla_S \sigma - \mathbf{n} \sigma \nabla_S \cdot \mathbf{n}) \right] dS = 0. \quad (\text{D.16})$$

Cette équation devant être vérifiée indépendamment du choix de V_k , A_k et A_i , il est nécessaire que chaque terme sous les différents signes somme soient identiquement nuls. En conséquence on obtient les bilans de quantité de mouvement phasiques et aux interfaces,

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) - \nabla \cdot \mathbb{T}_k - \rho_k \mathbf{F}_k = 0 \quad (\text{D.17})$$

$$\dot{m}_1 \mathbf{v}_1 + \dot{m}_2 \mathbf{v}_2 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2 = -\nabla_S \sigma + \mathbf{n} \sigma \nabla_S \cdot \mathbf{n} \quad (\text{D.18})$$

D.3 Expression du gradient de surface et de la divergence de surface de la normale

Dans un premier temps on rappelle les définitions relatives aux définitions paramétriques des surfaces et les définitions des deux premières formes quadratiques fondamentales d'une surface. On introduit la définition du tenseur métrique d'une surface et le calcul de la courbure moyenne. On peut trouver un exposé complet de ces outils par exemple dans les ouvrages de Aris (1962) et Donedu (1981).

D.3.1 Définition paramétrique d'une surface

Une surface est définie comme un lieu géométrique de l'espace dépendant de deux paramètres et éventuellement du temps,

$$S : \mathbf{M}(u, v, t). \quad (\text{D.19})$$

Les coordonnées cartésiennes d'un point de cette surface sont données par,

$$x^i(u, v). \quad (\text{D.20})$$

Une courbe tracée sur la surface est définie par son équation paramétrique,

$$C : u = u(t), v = v(t) \text{ ou encore } u^\alpha(t) \quad (\text{D.21})$$

où les indices de l'alphabet latin varient de 1 à 3 et les indices de l'alphabet grec varient de 1 à 2. La tangente à la courbe a pour coordonnées cartésiennes,

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{dt} = t_\alpha^i \frac{du^\alpha}{dt} = \mathbf{a}_\alpha \frac{du^\alpha}{dt}. \quad (\text{D.22})$$

où t_α^i sont les coordonnées cartésiennes des vecteurs de base \mathbf{a}_α sur la surface. On obtient un vecteur normal à la surface en effectuant le produit vectoriel des deux vecteurs de base. Les coordonnées cartésiennes de cette normale sont,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \quad n^i = \epsilon_{ijk} t_1^j t_2^k \quad (\text{D.23})$$

On rappelle que la position des indices importe (Aris, 1962, ch. 7). Un indice en position inférieure est relatif à une quantité covariante et un indice en position supérieure est relatif à

une quantité contravariante. Si on définit un changement de coordonnées dans l'espace par les fonctions $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3)$, les nouvelles coordonnées d'un élément infinitésimal se transforment selon,

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j, \quad (\text{D.24})$$

et on dénomme toute quantité se transformant selon cette règle une quantité *contravariante*. Par exemple la vitesse d'un point se transforme par changement de repère par,

$$\bar{v}^i = \frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j, \quad (\text{D.25})$$

les quantités v^i représentent donc une quantité contravariante. Les dérivées d'une fonction scalaire j se transforment selon,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}. \quad (\text{D.26})$$

Si on définit la quantité $a_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, elle se transforme selon,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^i} = \bar{a}^i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} a_j. \quad (\text{D.27})$$

Cette règle de transformation définit le caractère *covariant* d'une quantité. Les seules transformations possibles des coordonnées cartésiennes sont des rotations. La matrice de changement de repère $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$ est orthogonale et les deux règles de transformation (D.24) et (D.27) sont identiques. Il n'y a donc pas lieu de faire la différence entre les quantités covariantes et contravariantes.

D.3.2 Les deux premières formes quadratiques fondamentales de la surface

La tangente à la courbe C s'obtient par dérivation de la position (D.22). L'abscisse curviligne le long de cette courbe est définie par,

$$ds^2 = dx^i dx^i = t_\alpha^i t_\beta^i du^\alpha du^\beta = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta. \quad (\text{D.28})$$

Cette quantité est appelée la première forme quadratique fondamentale de la surface, les quantités $a_{\alpha\beta}$ sont les composantes du *tenseur métrique de la surface*. Par construction il est symétrique.

Le déterminant des coefficients du tenseur métrique représente le carré de la norme de la normale \mathbf{n} à S définie par (D.23). C'est aussi la taille de l'élément de surface,

$$dS = |a_{\alpha\beta}| du^\alpha du^\beta = a du^\alpha du^\beta, \quad (\text{D.29})$$

avec,

$$a = |a_{\alpha\beta}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (\text{D.30})$$

On définit le tenseur adjoint du tenseur métrique par,

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a}, \quad a^{12} = a^{21} = -\frac{a_{12}}{a}, \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a}. \quad (\text{D.31})$$

La deuxième forme quadratique fondamentale est définie à partir de la projection de la dérivée seconde sur la normale unitaire à la surface, $\mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|$,

$$\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \cdot \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} = b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt}. \quad (\text{D.32})$$

On appelle la quantité,

$$b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad (D.33)$$

la deuxième forme quadratique fondamentale. Le rapport des deux premières formes quadratiques définit la courbure normale de la surface dans la direction tangente à la courbe C .

$$\kappa_{(n)} = \frac{b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta} \quad (D.34)$$

La courbure normale possède deux extrema dont la demi somme définit la courbure moyenne de la surface, H ,

$$2aH = a_{11}b_{22} - a_{21}b_{21} - a_{12}b_{12} + a_{22}b_{11} = aa^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} \quad (D.35)$$

On retiendra la formule pratique,

$$2H = a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}. \quad (D.36)$$

La quantité dont on a effectivement besoin dans le théorème de Gauss (D.14) est en fait $2H\mathbf{n}$. H et \mathbf{n} dépendent de l'orientation de la normale alors que leur produit en est indépendant.

On a également défini le gradient de surface d'une fonction $g(u, v)$ définie sur la surface. Il se calcule par,

$$\nabla_S g = a^{\alpha\beta} g_{,\beta} \mathbf{a}_\alpha. \quad (D.37)$$

Si la fonction g possède également une définition (ce qui n'est pas le cas de la tension de surface) dans le volume,

$$g(u, v) = G(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (D.38)$$

on a la relation suivante,

$$g_{,\beta} = \frac{\partial g}{\partial u_\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial u_\beta} \frac{\partial G}{\partial x^i} = t_\beta^i \frac{\partial G}{\partial x^i} \quad (D.39)$$

D.4 Normale, gradient de surface et courbure d'une surface en représentation paramétrée cartésienne

Une surface en représentation paramétrée cartésienne possède l'équation suivante,

$$\mathbf{M}(x, y) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + f(x, y)\mathbf{e}_z, \quad (D.40)$$

Le vecteurs de base de la surface sont respectivement,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{vmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{vmatrix} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{vmatrix} \quad (D.41)$$

Le tenseur métrique est donné par,

$$a_{11} = 1 + f_x'^2, \quad a_{12} = a_{21} = f'_x f'_y, \quad a_{22} = 1 + f_y'^2 \quad (D.42)$$

Le déterminant du tenseur métrique vaut,

$$a = 1 + f_x'^2 + f_y'^2 \quad (D.43)$$

Le tenseur adjoint du tenseur métrique a pour expression,

$$a^{11} = \frac{1 + f_y'^2}{a}, \quad a^{12} = a^{21} = -\frac{f_x' f_y'}{a}, \quad a^{22} = \frac{1 + f_x'^2}{a} \quad (\text{D.44})$$

Les dérivées secondes de la position sont données par,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2} x = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{x^2}'' \end{vmatrix} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2} y = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{xy}'' \end{vmatrix} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial y^2} y = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{y^2}'' \end{vmatrix} \quad (\text{D.45})$$

Les coefficients de la seconde forme quadratique sont donnés par,

$$b_{11} = \frac{f_{x^2}''}{\sqrt{a}}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{f_{xy}''}{\sqrt{a}}, \quad b_{22} = \frac{f_{y^2}''}{\sqrt{a}}. \quad (\text{D.46})$$

La courbure moyenne est obtenue par,

$$2H = a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \frac{f_{x^2}''(1 + f_y'^2) - 2f_x' f_y' f_{xy}'' + f_{y^2}''(1 + f_x'^2)}{(1 + f_x'^2 + f_y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{D.47})$$

On retiendra le résultat utile suivant où \mathbf{n} est donné par (D.41),

$$2H\mathbf{n} = \frac{f_{x^2}''(1 + f_y'^2) - 2f_x' f_y' f_{xy}'' + f_{y^2}''(1 + f_x'^2)}{(1 + f_x'^2 + f_y'^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{n}. \quad (\text{D.48})$$

Pour la demi-sphère, $z > 0$, de rayon R , on a, $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. La substitution dans (D.41) donne $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{ext}$ où \mathbf{n}_{ext} est la normale unitaire extérieure à la sphère. La substitution dans (D.48) donne,

$$2H\mathbf{n} = -\frac{2\mathbf{n}_{ext}}{R}. \quad (\text{D.49})$$

Pour le demi-cylindre, $z > 0$, d'axe Ox et de rayon R , on a, $f(x, y) = \sqrt{R^2 - y^2}$. La substitution dans (D.41) donne $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{ext}$ où \mathbf{n}_{ext} est la normale unitaire extérieure à la surface latérale du cylindre. La substitution dans (D.48) donne,

$$2H\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{n}_{ext}}{R}. \quad (\text{D.50})$$

Une fonction $g(x, y)$ définie sur surface est liée à ces valeurs dans l'espace $G(x, y, z)$ par,

$$g(x, y) = G(x, y, f(x, y)), \quad (\text{D.51})$$

et leur dérivées sont liées par,

$$g_{,x} = \frac{\partial g}{\partial x} = G'_x + f'_x G'_z \quad (\text{D.52})$$

$$g_{,y} = \frac{\partial g}{\partial y} = G'_y + f'_y G'_z \quad (\text{D.53})$$

Le gradient de surface est donné par,

$$\begin{aligned} \nabla_S g = a^{\alpha\beta} g_{,\beta} \mathbf{a}_\alpha &= ((1 + f_y'^2)g_{,x} - f'_x f'_y g_{,y}) \frac{\mathbf{a}_1}{a} \\ &+ ((1 + f_x'^2)g_{,y} - f'_x f'_y g_{,x}) \frac{\mathbf{a}_2}{a}, \end{aligned} \quad (\text{D.54})$$

où on rappelle que les vecteurs \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 ne sont ni unitaires ni orthogonaux. L'expression du gradient de surface en fonction des dérivées de la fonction définie dans l'espace est,

$$\begin{aligned} \nabla_S g = & \left((1 + f_y'^2)G'_x - f'_x f'_y G'_y + f'_x G'_z \right) \frac{\mathbf{a}_1}{a} \\ & + \left(-f'_x f'_y G'_x + (1 + f_x'^2)G'_y + f'_y G'_z \right) \frac{\mathbf{a}_2}{a} \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

Pour une surface bidimensionnelle et une fonction g , ($f'_y = 0$ et $g_{,y} = 0$) on a,

$$2H\mathbf{n} = a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \mathbf{n} = \frac{f_x''}{(1 + f_x'^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{n} \quad (\text{D.56})$$

Le déterminant du tenseur métrique se réduit à,

$$a = 1 + f_x'^2 \quad (\text{D.57})$$

Le gradient de surface est donné par,

$$\nabla_S g = a^{\alpha\beta} g_{,\beta} \mathbf{a}_\alpha = \frac{g_{,x}}{a} \mathbf{a}_1 \quad (\text{D.58})$$

son expression en fonction des dérivées de la fonction définie dans l'espace est,

$$\nabla_S g = \frac{G'_x + f'_x G'_z}{a} \mathbf{a}_1, \quad (\text{D.59})$$

qui se met également sous la forme,

$$\nabla_S g = \frac{G'_x + f'_x G'_z}{\sqrt{a}} \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{a}} = (\nabla G \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}, \quad (\text{D.60})$$

où \mathbf{t} est la tangente unitaire à la section de S par le plan $y = 0$ orientée par l'axe des x .

On peut également définir la surface bidimensionnelle en paramétrant sa coupe selon $y = 0$ par l'abscisse curviligne,

$$M(s, y) = x(s)\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z(s)\mathbf{e}_z, \quad (\text{D.61})$$

les vecteurs de la base locale sont donnés par,

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} = x'\mathbf{e}_x + z'\mathbf{e}_z \quad (\text{D.62})$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} = \mathbf{e}_y \quad (\text{D.63})$$

$$\mathbf{n} = -z'\mathbf{e}_x + x'\mathbf{e}_z \quad (\text{D.64})$$

où l'on a noté que s étant l'abscisse curviligne, $a = 1$. La courbure moyenne est donnée par,

$$2H\mathbf{n} = (z''x' - z'x'')\mathbf{n}, \quad (\text{D.65})$$

et le gradient de surface d'une fonction $g(s, y)$ éventuellement définie dans l'espace $g(s, y) = G(s(x), y, z(s))$ est donné par,

$$\nabla_S g = g'_s \mathbf{a}_1 + g'_y \mathbf{a}_2 \quad (\text{D.66})$$

$$= (x'G'_x + z'G'_z)\mathbf{a}_1 + G'_y \mathbf{a}_2, \quad (\text{D.67})$$

qui est encore la projection du gradient de G sur le plan tangent.

D.5 Normale, gradient de surface et courbure d'une surface en représentation paramétrée cylindro-polaire

Une surface en représentation paramétrée cylindrique possède l'équation suivante dans la base orthonormée $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$,

$$\mathbf{M}(\theta, z) = r(z, \theta)\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \quad (\text{D.68})$$

Les vecteurs de la base locale, la normale qui s'en déduit et le déterminant du tenseur métrique de surface sont donnés par,

$$\mathbf{a}_\theta = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} = r'_\theta \mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{D.69})$$

$$\mathbf{a}_z = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} = r'_z \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.70})$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a}}(r\mathbf{e}_r - r'_\theta \mathbf{e}_\theta - rr'_z \mathbf{e}_z), \quad (\text{D.71})$$

$$a = r^2(1 + r'^2_z) + r'^2_\theta. \quad (\text{D.72})$$

La courbure normale est donnée par,

$$2H\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}}{a^{\frac{3}{2}}} \left((1 + r'^2_z)(r[r''_{\theta^2} - r] - 2r'^2_\theta) - 2r'_z r'_\theta (rr''_{\theta z} - r'_\theta r'_z) + rr''_{z^2}(r^2 + r'^2_\theta) \right), \quad (\text{D.73})$$

et le gradient de surface de $g(z, \theta) = G(r(z, \theta), \theta, z)$ est donné par,

$$\nabla_S g = ((1 + r'^2_z)g'_\theta - r'_z r'_\theta g'_z) \frac{\mathbf{a}_\theta}{a} + (-r'_z r'_\theta g'_\theta + (r^2 + r'^2_\theta)g'_z) \frac{\mathbf{a}_z}{a} \quad (\text{D.74})$$

Pour une sphère de rayon R et de centre O , $r(z, \theta) = \sqrt{R^2 - z^2}$, on retrouve,

$$2H\mathbf{n} = -\frac{2\mathbf{e}_r}{R}. \quad (\text{D.75})$$

Pour un cylindre de rayon R et d'axe Oz , $r(z, \theta) = R$, on retrouve,

$$2H\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{e}_r}{R}. \quad (\text{D.76})$$

On peut également de façon pratique, paramétrer une méridienne d'une surface de révolution en fonction de son abscisse curviligne. La position d'un point de la surface est alors donné par,

$$\mathbf{M}(\theta, s) = r(s)\mathbf{e}_r + z(s)\mathbf{e}_z, \quad (\text{D.77})$$

La normale et le déterminant du tenseur métrique sont donnés par,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a}}(z'\mathbf{e}_r - r'\mathbf{e}_z), \quad (\text{D.78})$$

$$a = r^2. \quad (\text{D.79})$$

La courbure moyenne est donnée par,

$$2H = (r''z' - z''r') - \frac{z'}{r}. \quad (\text{D.80})$$

Pour un cylindre d'axe Oz , on a , $r = R$, $z = s$ et on obtient, $2H = -1/R$ et $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$. Pour une sphère, on prend, $r = R \cos(s/R)$ et $z = R \sin(s/R)$ et on obtient, $2H = -2/R$ avec $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{ext}$.

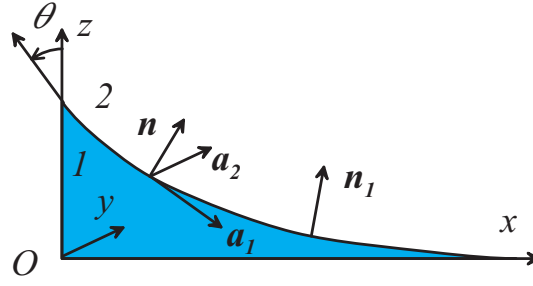


Figure D.6: Schéma d'un ménisque remontant le long d'une paroi mouillée par le fluide. θ est l'angle de contact statique. Le fluide 1 est de l'eau et le fluide 2 est de l'air.

D.6 Applications

D.6.1 Ménisque attaché à une paroi verticale

Une application classique du bilan de quantité de mouvement à l'interface consiste à calculer la forme à l'équilibre d'un ménisque bidimensionnel montant le long d'une plaque plane. De nombreuses solutions numériques de problèmes analogues sont données par Hartland & Hartley (1976) notamment, mais pas exclusivement, en géométrie axisymétrique.

On se donne la nature du fluide (ρ, σ) et l'angle de contact θ . On néglige la masse volumique du gaz.

L'échelle de longueur du problème est la longueur capillaire définie par,

$$a^2 = \frac{2\sigma}{\rho g}, \quad (\text{D.81})$$

qui représente la longueur pour laquelle la pression capillaire ($2\sigma/a$) est du même ordre de grandeur que la pression hydrostatique ($\rho g a$). Le bilan de quantité de mouvement à l'interface (D.18), en absence de mouvement donne,

$$p_1 \mathbf{n}_1 + p_2 \mathbf{n}_2 = \sigma \mathbf{n} \nabla_S \cdot \mathbf{n} = -2H \mathbf{n} \quad (\text{D.82})$$

La formule (D.41) nous assure qu'avec les axes choisis ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$). La courbure moyenne étant donnée par (D.56), on a en projetant sur \mathbf{n}_1 ,

$$p_1 - p_2 = -\frac{\sigma z''}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{D.83})$$

Les deux fluides étant à l'équilibre, la pression est hydrostatique. L'interface étant plane pour $x \rightarrow \infty$, le saut de pression y est nul. La pression dans les deux phase y vaut p_0 . On a alors,

$$p_1 = p_0 - \rho g z, \quad (\text{D.84})$$

$$p_2 = p_0. \quad (\text{D.85})$$

La substitution dans (D.83) donne l'équation différentielle régissant l'élévation de l'interface,

$$\frac{\rho g}{\sigma} z - \frac{z''}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (\text{D.86})$$

En multipliant par z' , l'équation s'intègre une première fois,

$$\frac{\rho g}{2\sigma} z^2 + \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} = A. \quad (\text{D.87})$$

La valeur de la constante d'intégration est déterminée en utilisant à nouveau $z' \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0$. On en déduit $A = 1$. Puisque a est l'échelle de longueur, on pose $z = aZ(x/a)$ et $x = aX$. La nouvelle équation est,

$$Z^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + Z'^2}}. \quad (\text{D.88})$$

Cette équation donne déjà la relation entre la hauteur du ménisque, h , et l'angle de contact θ . On a $Z'(0) = \tan \theta$ et $Z(0) = H = h/a$, d'où,

$$h = aH = \sqrt{1 - \sin \theta}, \quad (\text{D.89})$$

ce qui montre que la hauteur de ménisque maximum est a et qu'elle est atteinte pour un mouillage parfait ($\theta = 0$). On résout (D.88) par rapport à Z' . Il y a deux solutions. Il faudra conserver la négative si on a un angle de contact inférieur à $\pi/2$ (liquide mouillant) et $h > 0$ car $Z' < 0$.

$$Z' = \pm \frac{Z}{1 - Z^2} \sqrt{2 - Z^2}. \quad (\text{D.90})$$

Dans ces conditions l'équation étant à variables séparables, on intègre en séparant les deux termes obtenus,

$$X = \int \frac{Z dZ}{\sqrt{2 - Z^2}} + \int \frac{-dZ}{Z\sqrt{2 - Z^2}}. \quad (\text{D.91})$$

Le premier terme s'intègre à vue, tandis que pour le second, on change de variables deux fois : $Z = 1/u$, puis $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ch} v$. On obtient en utilisant la condition initiale (D.89),

$$\frac{x}{a} = f\left(\frac{z}{a}\right) - f\left(\sqrt{1 - \sin(\theta)}\right) \quad (\text{D.92})$$

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{argch} \frac{\sqrt{2}}{Z} - \sqrt{2 - Z^2} \quad (\text{D.93})$$

La figure D.7 montre trois profils obtenus pour trois angles de contact différents. Le résultat est identique à celui obtenu par Batchelor (1967, p. 66) qui utilise $d = a/\sqrt{2}$ comme échelle de longueur. Il est analogue, au signe, près à celui de Landau & Lifchitz (1971, p. 295). Il est identique à celui de de Gennes *et al.* (2002, p. 49) pourvu que l'on remplace κ^{-1} par $a/\sqrt{2}$ et que l'on remplace l'argsh par un argch.

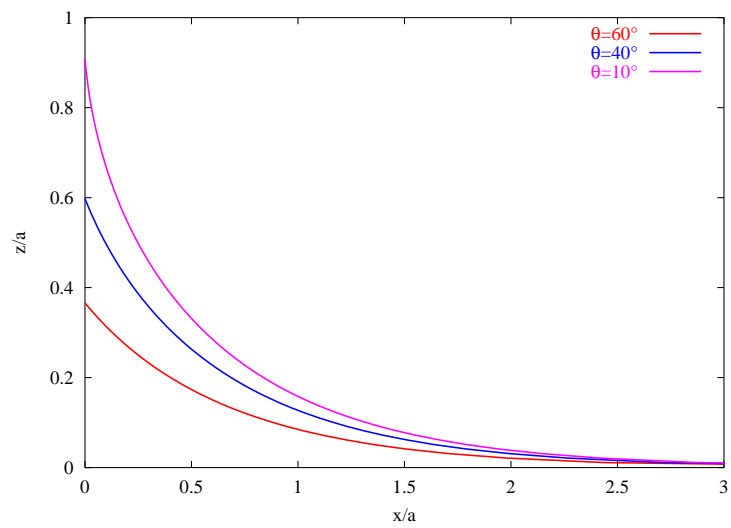


Figure D.7: Profil du ménisque donné implicitement par (D.92) pour trois valeurs de l'angle de contact.

Annexe E

Modèle d'écoulement dispersé à gouttelettes

Les équations doublement moyennées en espace et en temps fournissent le modèle 1D le plus général, le modèle dit à deux fluides. Nous montrons dans cette annexe comment fermer ce modèle dans le cas particulier des écoulements à gouttelettes. Le modèle ainsi élaboré a permis en particulier d'étudier le phénomène de blocage de débit en tuyère convergente divergente (Selmer-Olsen, 1991, Camelo-Cavalcanti, 1993, Lemaire, 1999) ou le refroidissement de gaz chauds par injection d'eau froide (Jérémie, 1998). On détaille l'établissement des équations de bilan obtenues à partir des formulations générales du chapitre 3. Certaines étapes intermédiaires décrites au chapitre 3 sont détaillées à nouveau ici sachant que l'on peut aboutir plus rapidement au résultat final.

On détaille de plus, une méthode possible de fermeture des équations et une manière relativement classique d'obtenir le système d'équations différentielles fermé décrivant les solutions stationnaires du modèle. On analysera ensuite quelques résultats que l'on interprétera à partir de données expérimentales.

E.1 Description d'un système industriel

Dans certains dispositifs industriels, il est nécessaire de refroidir des gaz chauds en les mélangeant à de l'eau au préalable pulvérisée. L'eau est injectée par une série de trous pratiqués dans la paroi de la conduite et les gaz sont produits par une source comme un générateur de gaz que l'on peut considérer comme un enceinte à pression génératrice donnée.

Un modèle d'écoulement permet de dimensionner le circuit de gaz. Il permet notamment de déterminer la température de mélange, la distance à laquelle cette dernière est atteinte. De plus, l'évaporation de l'eau augmentant significativement le volume des gaz, leur vitesse augmente et un modèle permet de déterminer les conditions de blocage de débit (au sens sonique) du système. Finalement, on obtient également la distribution longitudinale de pression dans le dispositif ce qui permet de déterminer la résistance mécanique des tuyauteries. Le système sera modélisé comme une conduite de section variable et l'approximation monodimensionnelle sera acceptée dans un souci de simplification.

E.2 Variables indépendantes du problème.

L'écoulement comporte deux phases. Le liquide que l'on supposera uniquement présent sous forme de gouttelettes et le gaz qui sera constitué, pour simplifier, d'air (ou de gaz incondensables) et de vapeur d'eau. Le gaz et le liquide entrent dans le dispositif à des vitesses différentes, et possèdent une inertie différente, il convient de les décrire par deux champs de vitesses différents (déséquilibre mécanique). La phase liquide sera considérée comme constituée uniquement d'eau pure tandis que le gaz sera considéré comme un mélange parfait de vapeur d'eau et d'air c'est-à-dire, l'additivité des pressions partielles (loi de Dalton) et la

loi des gaz parfaits s'appliquent. On suppose en particulier que l'air ou les incondensables ne sont présents que dans la phase gazeuse. Il n'y a donc pas de gaz dissous dans la phase liquide.

Les températures des gaz et du liquide sont différentes à l'entrée du dispositif et le resteront quelque temps (déséquilibre thermique). Il est donc aussi nécessaire de décrire chaque phase par une enthalpie différente. Le modèle à deux fluides (dit à six équations) est donc indiqué, il est constitué des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale de chaque phase. Le modèle moyenné dans la section et dans le temps sera considéré.

Il doit par ailleurs être augmenté d'une équation permettant de déterminer la composition du mélange de gaz. Les gouttelettes seront considérées suffisamment petites pour qu'elle puissent être décrites par une température unique qui sera également celle de l'interface.

E.3 Bilans de masse

Le bilan de masse phasique, pour la phase k , moyenné dans la section et dans le temps s'écrit (voir équation 3.174 et la figure 3.11 pour les quantités non définies),

$$\frac{\partial}{\partial t} A \overline{R_{k2} < \rho_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z} A \overline{R_{k2} < \rho_k v_k >_2} = - \overline{\int_{C(z,t)} \dot{m}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} \quad (\text{E.1})$$

où A est l'aire de la section droite de la conduite, R_{k2} est la fraction surfacique de phase instantanée, ρ est la masse volumique, v_k est la vitesse de la phase k projetée sur l'axe de la conduite, \dot{m}_k est le flux quittant la phase k à travers l'interface (masse par unité de temps et d'aire de l'interface), \mathbf{n}_k est la normale à l'interface orientée vers l'extérieur de la phase k , C est l'intersection de l'interface avec le plan de cote z et \mathbf{n}_{kC} est la normale à la courbe (plane) C . En négligeant les profils des différentes variables sur la section et en introduisant le taux de vide $\alpha = \overline{R_{G2}}$, le bilan de masse du liquide s'écrit,

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - \alpha) A \rho_L + \frac{\partial}{\partial z} (1 - \alpha) A \rho_L v_L = - A \overline{\Gamma_2 < \dot{m}_L >_i} \quad (\text{E.2})$$

où ρ_L est la masse volumique du liquide, v_L la vitesse moyenne du liquide. Le flux moyen de masse à l'interface est défini par,

$$\int_{C(z,t)} \dot{m}_L \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = < \dot{m}_L >_i \int_{C(z,t)} \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}, \quad (\text{E.3})$$

et où l'aire interfaciale instantanée par unité de volume de la conduite, $\Gamma_2(t)$ est définie par,

$$\Gamma_2(t) = \frac{1}{A} \int_{C(z,t)} \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}. \quad (\text{E.4})$$

Pour être plus précis, l'aire interfaciale volumique n'est définie que pour un volume fini. En intégrant l'aire des interfaces sur une portion de conduite comprise entre les abscisses z_1 et z_2 on a,

$$A_i(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{C(z,t)} \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}, \quad (\text{E.5})$$

où A_i représente l'aire des interfaces comprise entre z_1 et z_2 . L'aire interfaciale volumique est par définition égale à,

$$\Gamma_3(t) = \frac{1}{V(z_1, z_2)} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{C(z,t)} \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = \frac{A_i(z_1, z_2)}{V}. \quad (\text{E.6})$$

On observe que Γ_2 et Γ_3 ont des définitions analogues et qu'ils possèdent la même dimension. Par extension, on appellera également Γ_2 l'aire interfaciale (surfactive) instantanée et $A\Gamma_2(t)$ représente l'aire par unité de longueur de conduite des interfaces contenues dans la section de cote z . L'aire interfaciale moyenne est liée à l'aire interfaciale locale par,

$$\overline{\Gamma_2} = \overline{\gamma} \quad (E.7)$$

où γ est l'aire interfaciale locale dont la définition est,

$$\gamma = \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{1}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}. \quad (E.8)$$

Cette identité résulte de la commutativité des termes d'interaction des équations doublement moyennées (voir section A.8.1). Le bilan de masse de la vapeur s'écrit en tenant compte du bilan de masse de l'eau à l'interface,

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha A \rho_V + \frac{\partial}{\partial z} \alpha A \rho_V v_V = A \overline{\Gamma_2} < \dot{m}_L >_i \quad (E.9)$$

où ρ_V est la masse volumique de la vapeur d'eau, v_V la vitesse moyenne des gaz. Puisque l'air ne peut se trouver que dans la phase gazeuse, son bilan de masse s'écrit simplement,

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha A \rho_A + \frac{\partial}{\partial z} \alpha A \rho_A v_G = 0 \quad (E.10)$$

où ρ_A est masse volumique de l'air.

E.4 Bilans de quantité de mouvement

Les bilans de quantité de mouvement phasiques, projetés sur l'axe de la conduite et simplifiés par l'hypothèse de pression moyenne phasique et à l'interface égales (voir équation 3.174 et la figure 3.11 pour les quantités non définies),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{A_k < \rho_k v_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k < \rho_k v_k^2 >_2} + \overline{A_k \frac{\partial}{\partial z} < p_k >_2} = \\ & - \int_{C(z,t)} (\dot{m}_k v_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k(z,t)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (E.11)$$

où on a négligé l'effet des forces de volume (gravité) et des contraintes visqueuses normales devant les effets d'inertie. En introduisant comme précédemment les valeurs moyennes aux interfaces et en invoquant les hypothèses du modèle 1D habituelles, on obtient,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} A(1 - \alpha) \rho_L v_L + \frac{\partial}{\partial z} A(1 - \alpha) \rho_L v_L^2 + A(1 - \alpha) \frac{\partial p_L}{\partial z} = \\ & - A \overline{\Gamma_2} < \dot{m}_L v_L >_i + A \overline{\Gamma_2} < \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z >_i + \overline{\mathcal{P}_L} < \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z >_W \end{aligned} \quad (E.12)$$

Le paragraphe suivant rappelle comment est établie cette équation à partir de l'expression directe obtenue à partir des principes fondamentaux.

E.5 Simplification du bilan de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement phasique moyenné dans la section et projeté sur l'axe de la conduite s'écrit,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k v_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k v_k^2 >_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{n}_z \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{n}_z >_2 - A_k < \rho_k F_z >_2 \\ & = - \int_{C(z,t)} (\dot{m}_k v_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{n}_z) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k(z,t)} \mathbf{n}_z \cdot (\mathbb{T}_k \cdot \mathbf{n}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (E.13)$$

où \mathbb{T}_k est le tenseur des contraintes appliquées à la phase k . En décomposant le tenseur des contraintes en partie visqueuse et effet de la pression,

$$\mathbb{T}_k = -p_k \mathbb{I} + \mathbb{V}_k, \quad (\text{E.14})$$

on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k v_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k v_k^2 >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < p_k >_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{n}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z >_2 \\ - A_k < \rho_k F_z >_2 = - \int_{C(z,t)} \dot{m}_k v_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \\ + \int_{C_k(z,t) \cup C(z,t)} \mathbf{n}_z \cdot (\mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} - \int_{C_k(z,t) \cup C(z,t)} p_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

La forme limite du théorème de Gauss pour une section, appliqué au tenseur \mathbb{M} considérant que l'aire de la section occupée par la phase k est limitée par $C \cup C_k$, donne,

$$\int_{A_k} \nabla \cdot \mathbb{M} dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k} \mathbb{M} \cdot \mathbf{n}_z dA + \int_{C_k(z,t) \cup C(z,t)} \mathbb{M} \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}. \quad (\text{E.16})$$

Appliqué au tenseur $\mathbb{M} = p_k \mathbb{I}$ et en projetant le résultat sur \mathbf{n}_z , on obtient (Hetsroni, 1982),

$$\int_{A_k} \mathbf{n}_z \cdot \nabla p_k dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k} p_k dA + \int_{C_k(z,t) \cup C(z,t)} p_k \mathbf{n}_z \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}. \quad (\text{E.17})$$

En introduisant l'opérateur de moyenne spatial de phase on obtient l'identité suivante,

$$A_k < \frac{\partial p_k}{\partial z} >_2 = \frac{\partial}{\partial z} A_k < p_k >_2 + \int_{C_k(z,t) \cup C(z,t)} p_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}. \quad (\text{E.18})$$

Grâce à cette identité, on élimine le dernier terme du bilan de quantité de mouvement (E.15) et on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k v_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k v_k^2 >_2 + A_k \frac{\partial}{\partial z} < p_k >_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{n}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z >_2 \\ - A_k < \rho_k F_z >_2 = - \int_{C(z,t)} \dot{m}_k v_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k(z,t) \cup C(z,t)} \mathbf{n}_z \cdot (\mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

En négligeant la contribution des contraintes visqueuses normales et les forces de volume, et en moyennant en temps, on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{A_k < \rho_k v_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k < \rho_k v_k^2 >_2} + \overline{A_k \frac{\partial}{\partial z} < p_k >_2} = \\ - \overline{\int_{C(z,t)} (\dot{m}_k v_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} + \overline{\int_{C_k(z,t)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}}. \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

En traitant les termes d'échanges avec l'interface et les termes d'échange avec la paroi comme pour le bilan de masse, on a pour la phase liquide,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A(1 - \alpha) \rho_L v_L + \frac{\partial}{\partial z} A(1 - \alpha) \rho_L v_L^2 + A(1 - \alpha) \frac{\partial p_L}{\partial z} = \\ - \overline{A \Gamma_2 < \dot{m}_L v_L >_i} + \overline{A \Gamma_2 < \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z >_i} + \overline{\mathcal{P}_L < \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z >_W}. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

E.6 Etablissement du bilan de quantité du mélange

Le bilan de quantité de mouvement du mélange s'obtient en additionnant les deux bilans phasiques (E.13).

$$\begin{aligned} & \sum_{k=L,G} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k v_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k v_k^2 >_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{n}_z \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{n}_z >_2 - A_k < \rho_k F_z >_2 \right\} \\ &= - \int_{C(z,t)} \sum_{k=L,G} (\dot{m}_k v_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{n}_z) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \sum_{k=L,G} \int_{C_k(z,t)} \mathbf{n}_z \cdot (\mathbb{T}_k \cdot \mathbf{n}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

En vertu des bilans de quantité de mouvement aux interfaces, en négligeant les effets de tension superficielle, le terme d'interaction à l'interface disparaît car,

$$\sum_{k=L,G} (\dot{m}_k \mathbf{v}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k) \equiv 0 \quad (\text{E.23})$$

en tout point de l'interface. En utilisant l'identité (E.18) et la définition du tenseur des contraintes (E.14) on obtient,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=L,G} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k v_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k v_k^2 >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < p_k >_2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{n}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z >_2 - A_k < \rho_k F_z >_2 \right\} \\ &= - \sum_{k=L,G} \int_{C_k(z,t)} p_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \sum_{k=L,G} \int_{C_k(z,t)} \mathbf{n}_z \cdot (\mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

En considérant que $\bigcup_{k=L,G} C_k = \mathcal{P}$, le périmètre de la conduite, on peut définir la contrainte de cisaillement moyenne du fluide à la paroi par,

$$\sum_{k=L,G} \int_{C_k(z,t)} \mathbf{n}_z \cdot (\mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = - \sum_{k=L,G} \mathcal{P}_k < \tau_k >_{W_k} = -\mathcal{P} < \tau_W >_W \quad (\text{E.25})$$

où le signe moins permet de souligner le caractère résistant du frottement pariétal. Pour un écoulement dans la direction z , τ_W est positif. De même on peut introduire une pression moyenne sur la paroi par,

$$\sum_{k=L,G} \int_{C_k(z,t)} p_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = < p >_W \sum_{k=L,G} \int_{C_k(z,t)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \quad (\text{E.26})$$

En supposant que les trois pressions moyennes, $< p >_W$, $< p_L >_2$ et $< p_G >_2$ sont égales et en utilisant l'identité suivante dérivée du théorème de Gauss appliqué à la section de la conduite pour $\mathbf{B} = \mathbf{n}_z$,

$$\frac{\partial A}{\partial z} = - \int_{\mathcal{P}} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}, \quad (\text{E.27})$$

on obtient,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=L,G} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k v_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k v_k^2 >_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{n}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z >_2 - A_k < \rho_k F_z >_2 \right\} \\ &= -A \frac{\partial p}{\partial z} - P < \tau_W >_W \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

où p est la valeur unique des différentes pressions identifiées ci-dessus. Il est important de remarquer que l'égalité des pressions moyennes n'est pas une hypothèse mineure. Elle est en particulier totalement injustifiée pour la description des écoulements stratifiés où elle est responsable d'incohérences physiques graves (voir chapitre 4). En moyennant l'équation précédente en temps et en négligeant les contraintes visqueuses normales et le forces de volumes on obtient,

$$\sum_{k=L,G} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \overline{A_k < \rho_k v_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k < \rho_k v_k^2 >_2} \right\} = -A \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \overline{P < \tau_W >_W} \quad (\text{E.29})$$

En introduisant le taux de vide et avec les hypothèses de profils plat du modèle 1D, on obtient

$$\sum_{k=L,G} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \overline{AR_{k2} < \rho_k v_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{AR_{k2} < \rho_k v_k^2 >_2} \right\} = -A \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \overline{P < \tau_W >_W} \quad (\text{E.30})$$

En introduisant le taux de vide et l'hypothèse de profils plats on obtient finalement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A \alpha \rho_G v_G + \frac{\partial}{\partial t} A(1-\alpha) \rho_L v_L + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha \rho_G v_G^2 + \frac{\partial}{\partial z} A(1-\alpha) \rho_L v_L^2 + A \frac{\partial p}{\partial z} = \\ -\overline{P < \tau_W >_W} \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

Le bilan de quantité de mouvement du mélange n'est bien sur pas indépendant du bilan de quantité de mouvement de chaque phase. On utilise soit les deux équations phasiques analogues à (E.21) ou une équation pour le mélange et une équation pour la phase dispersée, ici le liquide. C'est cette dernière solution qui sera retenue.

E.7 Bilans d'énergie totale phasique

Le bilan d'énergie totale, formulé en enthalpie, moyenné sur la section est donné par (3.151). Pour être cohérent avec les hypothèses précédentes, on néglige l'effet des contraintes visqueuse normales et des forces de volume. En supposant que la paroi est adiabatique (pas d'échange de chaleur pariétal), on obtient après moyenne en temps,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{A_k < \rho_k \left(i_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k < p_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k < \rho_k w_k \left(i_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2} \\ = - \overline{\int_{C(z,t)} \left(\dot{m}_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{q}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k \right) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}}, \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

où on aura remarqué que la puissance des contraintes pariétale est nulle puisque \mathbf{v}_k est nul à la paroi. Il n'y a donc pas d'échanges avec la paroi si cette dernière est adiabatique. En introduisant l'hypothèse des profils plats et le taux de vide, on obtient pour le liquide,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A(1-\alpha) \rho_L \left(i_L + \frac{1}{2} v_L^2 \right) - \frac{\partial}{\partial t} A(1-\alpha) p_L + \frac{\partial}{\partial z} A(1-\alpha) \rho_L v_L \left(i_L + \frac{1}{2} v_L^2 \right) \\ = -A \Gamma_2 < \left(\dot{m}_L \left(i_L + \frac{1}{2} v_L^2 \right) + \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{q}_L - \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{v}_L \right) >_i \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

où comme précédemment, on a introduit l'aire interfaciale dans l'expression du terme d'échange à l'interface. Pour les équations d'énergie, on peut également, utiliser soit deux équations phasiques analogues à (E.33) soit une équation pour la phase dispersée et une autre pour le mélange. Cette dernière s'obtient en additionnant les deux équations phasiques. En négligeant le saut de pression à l'interface, le bilan d'énergie totale à l'interface (3.115) stipule,

$$\dot{m}_1 \left(i_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) + \dot{m}_2 \left(i_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{V}_1) \cdot \mathbf{v}_1 - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{V}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \quad (\text{E.34})$$

En additionnant Les deux équations phasiques (E.32), le terme d'échange interfacial disparaît et on obtient,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} A \alpha \rho_G \left(i_G + \frac{1}{2} v_G^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} A (1 - \alpha) \rho_L \left(i_L + \frac{1}{2} v_L^2 \right) - \frac{\partial}{\partial t} A p \\ & + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha \rho_G v_G \left(i_G + \frac{1}{2} v_G^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} A (1 - \alpha) \rho_L v_L \left(i_L + \frac{1}{2} v_L^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

E.8 Récapitulation des équations et analyse de la fermeture

Le modèle est maintenant constitué. Nous avons écrit les principes fondamentaux sur toutes les composantes indépendantes de l'écoulement et le système comprend 7 équations : 3 bilans de masse (pour le liquide, équation E.2, pour la vapeur, équation E.9, pour les incondensables, équation E.10), 2 bilans de quantité de mouvement (pour le liquide, équation E.21, pour le mélange diphasique, équation E.31) et deux équations d'énergie (pour le liquide, équation E.33, pour le mélange, équation E.35).

Les variables indépendantes sont au nombre de 9 : 3 masses volumiques, 2 vitesses, 2 enthalpies, la pression et le taux de vide. Les équations manquantes seront fournies par les relations d'état de chaque fluide et le modèle de mélange de la vapeur et de l'air. Les quantités intervenant dans le membre de droite de chaque équation sont des quantités inconnues. Leur modélisation représente le problème de fermeture du modèle.

E.9 Relations de fermeture

E.9.1 Aire interfaciale

Les équations de bilan sur la phase dispersée font apparaître des termes d'interaction dont la forme est analogue à celle du bilan de masse,

$$\overline{\Gamma_2} < \overline{\dot{m}_L} >_i. \quad (\text{E.36})$$

En absence d'information sur les profils des différentes grandeurs on supposera que ces quantités sont uniformes sur la section et qu'il n'y a pas de corrélation temporelle entre l'aire interfaciale et le taux de transfert, en conséquence,

$$\overline{\Gamma_2} < \overline{\dot{m}_L} >_i \approx \overline{\Gamma_2} < \overline{\dot{m}_L} >_i = \nless \gamma_L \nless \overline{\Gamma_2} < \overline{\dot{m}_L} >_i. \quad (\text{E.37})$$

On décompose donc la modélisation de transfert en deux étapes : la modélisation de l'aire interfaciale volumique locale et le taux de transfert moyen à l'interface. On peut calculer l'aire interfaciale volumique locale et le taux de présence du liquide si on connaît la distribution de taille de gouttelettes. Cette dernière est mesurable par une méthode optique comme l'anémométrie à phase Doppler. Si $P(D)dD$ est la probabilité de présence d'une goutte de diamètre compris en D et $D + dD$, l'aire interfaciale et le taux de liquide sont liés à $P(D)$ par,

$$1 - \alpha = \alpha_L = \int_0^\infty \pi \frac{D^3}{6} P(D) dD, \quad (\text{E.38})$$

$$\gamma_L = \int_0^\infty \pi D^2 P(D) dD. \quad (\text{E.39})$$

On définit également pour les écoulements dispersés, le diamètre de Sauter moyen qui représente le diamètre que devrait avoir une goutte pour qu'elle soit représentative du rapport surface sur volume de la distribution,

$$D_{SM} = \frac{\int_0^\infty \pi D^3 P(D) dD}{\int_0^\infty \pi D^2 P(D) dD}, \quad (\text{E.40})$$

il est alors clair que l'aire interfaciale, le taux de liquide et le diamètre de Sauter sont liés par la relation,

$$D_{SM} = \frac{6(1 - \alpha)}{\gamma_L} \quad (\text{E.41})$$

Il suffit simplement de fournir une information sur le diamètre moyen, il peut être constant ou déterminé par un modèle de fractionnement turbulent (voir, par exemple Selmer-Olsen, 1991) pour obtenir une équation de fermeture pour l'aire interfaciale,

$$\nless \gamma_L \nless_2 \approx \gamma_L = \frac{6(1 - \alpha)}{D_{SM}}. \quad (\text{E.42})$$

E.9.2 Changement de phase

Le changement de phase d'une population de gouttelettes peut être approché à partir de la connaissance du comportement d'une gouttelette isolée pour laquelle de nombreux résultats existent (Gyarmathy, 1982, p. 124). Notamment, l'évaporation d'une gouttelette est représentée par le nombre de "Nusselt de masse", aussi appelé nombre de Sherwood. Le nombre de Sherwood est construit comme un nombre de Nusselt. Il compare l'intensité du transfert de masse à une échelle de cette quantité relative au transfert par diffusion seule (loi de Fick). On a,

$$Nu_M = Sh = \frac{\dot{M}}{2\pi r \mathcal{D}(\Pi_{V\infty} - \Pi_{Vi})}, \quad (\text{E.43})$$

où \dot{M} est le taux de variation de la masse, M , d'une gouttelette de rayon r (en kg/s), Π est la pression de vapeur rapportée à la pression partielle des incondensables au loin de la gouttelette, $\Pi_V = p_V/p_a$, et \mathcal{D} est un coefficient de diffusion moléculaire massique de la vapeur modifié (m^2/s) défini par,

$$\mathcal{D} = \frac{D_V \rho_\infty \bar{R}}{R_V(1 - \Pi_{V\infty})}, \quad (\text{E.44})$$

où \bar{R} est la constante des gaz parfait du mélange de gaz, ρ_∞ est la masse volumique du mélange de gaz au loin de la gouttelette, D_V est le coefficient de diffusion binaire massique de la vapeur dans le gaz incondensable. En additionnant (E.77) et (E.78) et en appliquant la loi de Dalton (E.82), on a,

$$p = p_a + p_V = (\rho_a R_a + \rho_V R_V) T_G = \rho_G \bar{R} T_G, \quad (\text{E.45})$$

d'où

$$\bar{R} = \frac{\rho_a}{\rho_G} R_a + \frac{\rho_V}{\rho_G} R_V = (1 - c) R_a + c R_V. \quad (\text{E.46})$$

Le taux de transfert de masse moyen à l'interface d'une gouttelette est donc lié au nombre de Sherwood par,

$$\dot{m} = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2} = \frac{Sh}{D_g} \frac{D_V \rho_G}{(1 - \Pi_{V\infty})} \frac{R_G}{R_V} (\Pi_{V\infty} - \Pi_{Vi}) \quad (\text{E.47})$$

où D_g est le diamètre de la gouttelette. Gyarmathy (1982, p. 139) propose la corrélation de transfert de masse suivante pour le nombre de Sherwood, lorsque le mécanisme prépondérant est l'évaporation par convection forcée autour de la gouttelette,

$$Sh = 2(1 + 0,3 Re_g^{1/2} Sc^{1/3} \Pi_{G\infty}^{1/3}), \quad (\text{E.48})$$

où le nombre de Reynolds, Re_g de la goutte est défini par,

$$Re_g = \frac{\rho_G |v_G - v_L| D_g}{\mu_G}, \quad (\text{E.49})$$

où μ_G est la viscosité dynamique du gaz et le nombre de Schmidt, Sc est défini par,

$$Sc = \frac{\mu_G}{\rho_G D_V} = \frac{\nu_G}{D_V}, \quad (\text{E.50})$$

où ν_G est la viscosité cinématique du gaz. Lorsque l'air est sec, $\Pi_{v\infty}$ est nul. De plus, en supposant que l'interface de la gouttelette est en équilibre thermodynamique et que sa température est uniforme, on a de plus la relation suivante entre la pression de vapeur à l'interface et la température de l'interface,

$$p_{Vi} = P_{sat}(T_{Li}) = P_{sat}(T_L) \quad (\text{E.51})$$

où P_{sat} est la pression de saturation de l'eau à la température du liquide. En conséquence pour une goutte d'eau dans de l'air sec qui nécessairement s'évapore ($\dot{m}_L > 0$),

$$\Pi_{V\infty} - P_{Vi} < 0 \Rightarrow \dot{m} < 0 \quad (\text{E.52})$$

On propose de fermer le bilan de masse (E.2) en supposant que l'ensemble des gouttelettes de la phase dispersée s'évapore selon le modèle de la gouttelette isolée. En conséquence on pose, en vertu du signe de \dot{m} et de la définition de \dot{m}_L ,

$$\overline{< \dot{m}_L >_i} = -\dot{m} \quad (\text{E.53})$$

E.9.3 Frottement interfacial

Le bilan de quantité de mouvement sur la phase dispersée (E.21) fait apparaître trois quantités inconnues, dont deux font intervenir la contrainte de cisaillement. En supposant que le liquide est entièrement dispersé dans le gaz, il ne mouille pas la paroi, en conséquence,

$$\overline{\mathcal{P}_L < \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z >_W} = 0. \quad (\text{E.54})$$

Cette même équation comporte un terme relatif au cisaillement (frottement) moyen exercé par le gaz sur le liquide,

$$A \overline{\Gamma_2 < \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z >_i}. \quad (\text{E.55})$$

Ce terme représente la force par unité de longueur de conduite relative au frottement du gaz sur le liquide. Comme pour le bilan de masse, on sépare la contribution de l'aire interfaciale de celle de la contrainte de cisaillement moyenne, projetée sur l'axe de la conduite)

$$\overline{\Gamma_2 < \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z >_i} \approx \nless \gamma_L \nless \overline{2 < \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z >_i}. \quad (\text{E.56})$$

Cette dernière quantité représente la contrainte de cisaillement moyenne à l'interface que l'on note parfois τ_i .

$$\tau_i = \overline{< \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z >_i} \quad (\text{E.57})$$

Comme pour le transfert de masse, la contrainte moyenne peut être modélisée par la connaissance du comportement d'une gouttelette isolée. Il existe en effet de nombreux résultats expérimentaux sur la force de traînée de petites gouttelettes, F_D . En divisant cette force par l'aire de l'interface de la gouttelette, on obtient la contrainte de cisaillement moyenne relative à une gouttelette isolée,

$$| \overline{< \mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z >_i} | = \frac{F_D}{\pi D_g^2}. \quad (\text{E.58})$$

La traînée et le coefficient de traînée, C_D sont liés par la relation suivante,

$$F_D = \frac{1}{2}\rho_g(v_L - v_G)^2 C_D (Re_g) \pi r_g^2, \quad (\text{E.59})$$

où le coefficient de traînée est généralement fonction du nombre de Reynolds de la gouttelette et où l'on rappelle que πr_g^2 représente la surface projetée de la gouttelette sur un plan normal à la direction du mouvement. Gyarmathy (1982) propose de corréliser le frottement et le nombre de Reynolds par l'intermédiaire d'un nombre de Nusselt de frottement, Nu_F , lié au coefficient de traînée usuel par,

$$Nu_F = C_D \frac{Re_g}{8}. \quad (\text{E.60})$$

Ce nombre de Nusselt possède la même structure que celui relatif au transfert de masse (E.47). Il compare la contrainte de cisaillement moyenne à une échelle construite sur la contrainte de cisaillement visqueuse en régime laminaire. Il compare donc deux quantités analogues, la référence étant relative à la situation où seule la diffusivité moléculaire est à l'oeuvre par l'intermédiaire cette fois-ci de la viscosité du gaz. La corrélation proposée par Gyarmathy (1982) est la suivante,

$$Nu_F = 3(1 + 0,25Re^{0,687}), \quad (\text{E.61})$$

$$C_D = \frac{24}{Re_g}(1 + 0,25Re^{0,687}). \quad (\text{E.62})$$

$$(\text{E.63})$$

Il existe de nombreuses variantes et extensions de cette équation dont la validité est limitée à $Re_g < 200$ et notamment, Gyarmathy (1982) propose des corrections prenant en compte les effets collectifs des gouttelettes.

Lorsque le gaz est au repos, $v_G = 0$, la contrainte de cisaillement est opposée au mouvement du liquide (v_L), en conséquence l'expression correctement signée du frottement interfacial est,

$$\tau_i = \overline{\mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z}_{>i} = -2\rho_g(v_L - v_G)|v_L - v_G|C_D(Re_g). \quad (\text{E.64})$$

Il reste finalement une dernière contribution des interfaces au bilan de quantité de mouvement de la phase dispersée (E.21), que l'on traite toujours de la même façon,

$$\overline{\Gamma_2 < \dot{m}_L v_L}_{>i} \approx \overline{\Gamma_2 < \dot{m}_L}_{>i} \overline{v_L}_{>i} \approx \overline{\Gamma_2 < \dot{m}_L}_{>i} v_L. \quad (\text{E.65})$$

Ce terme représente la variation de quantité de mouvement du liquide relative au changement de phase : la masse quittant la gouttelette emmène aussi sa quantité de mouvement. Ce terme est généralement petit devant le cisaillement moyen. On peut le négliger, ce qui n'empêche pas, après coup, de calculer son ordre de grandeur par (E.65) pour justifier cette hypothèse.

E.9.4 Frottement pariétal

Le bilan de quantité de mouvement du mélange (E.31), ne fait intervenir qu'une seule quantité inconnue relative au frottement pariétal.

$$P < \overline{\tau_W}_{>W}. \quad (\text{E.66})$$

Les méthodes de calcul de la perte de pression par frottement présentées au chapitre 4 sont appropriées pour modéliser ce terme. On peut toutefois, dans le cas des écoulements dispersés

où le frottement pariétal peut ne jouer qu'un rôle secondaire, modéliser cet effet comme en écoulement monophasique de gaz seul.

$$\tau_W = \frac{1}{2} \rho_G v_G^2 f_W \quad (\text{E.67})$$

où f_W est le coefficient de frottement pariétal que l'on peut corrélérer pour des conduites lisses par le modèle de Blasius,

$$f_W = 0,079 Re_D^{-0,25}, \quad (\text{E.68})$$

où le nombre de Reynolds est relatif à l'écoulement de gaz dans la conduite,

$$Re_D = \frac{\rho_G v_G D_h}{\mu_G}, \quad (\text{E.69})$$

où on rappelle que $D_h = 4A/P$ est le diamètre hydraulique de la conduite.

E.9.5 Transferts de chaleur

Le bilan d'énergie totale du mélange ne comprend plus de termes inconnus en raison des hypothèses de modélisation retenues. En revanche, le bilan d'énergie, sous forme enthalpique (E.33), pour la phase dispersée, comprend un terme d'échange à l'interface. Pour le liquide, il s'exprime par,

$$\overline{\Gamma_2 < \left(\dot{m}_L \left(i_L + \frac{1}{2} v_L^2 \right) + \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{q}_L \right) >_i} \quad (\text{E.70})$$

où on a déjà négligé la contribution de la puissance des contraintes visqueuses à l'interface. On ne connaît aucune de ces quantités coté liquide. En revanche le bilan d'enthalpie simplifié à l'interface (3.116) permet d'exprimer ces quantités du coté du gaz. On peut soit directement négliger le flux d'énergie mécanique à l'interface ou le traiter comme le terme équivalent dans le bilan de quantité de mouvement (E.65). Par simplicité, on élimine ce terme, sa prise en compte approchée ne posant pas de problème et, en vertu du bilan à l'interface, vrai à tous instants et en tous points de l'interface,

$$\dot{I}_L = \overline{\Gamma_2 < (\dot{m}_L i_L + \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{q}_L) >_i} = -\overline{\Gamma_2 < (\dot{m}_G i_G + \mathbf{n}_G \cdot \mathbf{q}_G) >_i}. \quad (\text{E.71})$$

Dans le cas qui nous intéresse, l'évaporation de gouttelettes d'eau dans un gaz chaud, cette équation signifie simplement que le flux de chaleur arrivant du gaz à l'interface sert à vaporiser l'eau ($\dot{m}_L(i_G - i_L)$) dont le taux de changement de phase est imposé par la convection (voir bilan de masse) et que le reste, $(\mathbf{q}_L \cdot \mathbf{n}_L)$ sert à chauffer la gouttelette. Comme pour les termes précédents de même nature, on pose,

$$\dot{I}_L \approx -\langle \gamma_L \rangle_2 \overline{\langle \dot{m}_G \rangle_i \langle i_G \rangle_i} - \langle \gamma_L \rangle_2 \overline{\langle \mathbf{n}_G \cdot \mathbf{q}_G \rangle_i}. \quad (\text{E.72})$$

Le dernier terme représente le flux de chaleur apporté à l'interface par le gaz. On peut, à nouveau s'inspirer des résultats relatifs au flux de chaleur échangés par une gouttelette sphérique. La densité de flux de chaleur q_G et le coefficient de transfert de chaleur, h sur une sphère sont liés par la relation suivante et l'échange peut être décrit par la corrélation de Frössling (Gyarmathy, 1982),

$$Nu = \frac{h D_g}{k_G} = \frac{q_G D}{k_G (T_G - T_{Gi})} = 2(1 + 0,552 Re_g^{1/2} Pr^{1/3}) \quad (\text{E.73})$$

où k_G est la conductivité du gaz. Comme pour tous les termes de transfert déjà évoqués, on utilise le modèle de la gouttelette isolée pour évaluer le flux de chaleur par,

$$\overline{\langle \mathbf{n}_G \cdot \mathbf{q}_G \rangle_i} = q_G = \frac{k_G (T_G - T_{Gi})}{D_g} Nu. \quad (\text{E.74})$$

Le flux de chaleur quittant le gaz est positif lorsque le gaz est à une température supérieure à celle de l'interface.

E.10 Relations d'état et propriétés des fluides

Pour simplifier l'analyse, on considère les gaz comme parfaits et on suppose également le mélange comme parfait : selon la loi de Dalton la pression du gaz est égale à la somme des pressions partielles des constituants. Bien évidemment on peut considérer des relations d'états plus réalistes.

E.10.1 Masse volumique

La masse volumique du gaz, constitué d'air et de vapeur, est par définition la somme des masses volumiques de chaque constituants,

$$\rho_G = \rho_a + \rho_V, \quad (\text{E.75})$$

où les indices a et V sont relatifs respectivement à l'air ou les gaz incondensables et la vapeur. Soit de plus, c , la fraction massique de vapeur. On a par définition,

$$c = \frac{\rho_V}{\rho_a + \rho_V} = \frac{\rho_V}{\rho_G}. \quad (\text{E.76})$$

En supposant que l'air et la vapeur suivent la loi des gaz parfaits, on a,

$$p_a = \rho_a \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}_a} T_G, \quad (\text{E.77})$$

$$p_V = \rho_V \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}_V} T_G, \quad (\text{E.78})$$

où \mathcal{R} et \mathcal{M} sont respectivement la constante des gaz parfaits molaire et la masse molaire. Une estimation de ces constantes peut être obtenues simplement pour l'air et la vapeur par,

$$R_a = \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{M}_a} \approx \frac{8,316 \text{ J/mol/K}}{29 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} \approx 287 \text{ J/kg/K} \quad (\text{E.79})$$

$$R_V = \frac{\mathcal{R}_V}{\mathcal{M}_V} \approx \frac{8,316 \text{ J/mol/K}}{18 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} \approx 462 \text{ J/kg/K} \quad (\text{E.80})$$

$$(\text{E.81})$$

Si le mélange est parfait, la pression du mélange est égale à la somme des pressions partielles,

$$p = p_a + p_V \quad (\text{E.82})$$

Les propriétés physiques de l'eau peuvent être approchées par des modèles simples (liquide incompressible etc.). Il n'est toutefois pas plus compliqué de prendre en compte les propriétés réelles. Seule l'interface est en conditions de saturation. On rappelle que les conditions d'équilibre thermodynamique approchées de l'interface sont simplement,

$$T_{Li} = T_{Vi} = T_{Gi}, \quad (\text{E.83})$$

où on a bien identifié que le gaz n'est décrit que par une seule température. Le liquide peut en revanche être sous-refroidi. Toutefois, la masse volumique variant principalement avec la température, on peut approcher la masse volumique en utilisant les conditions à saturation pour la température de la gouttelette. Cette dernière approximation n'est pas nécessaire si on dispose de tables thermodynamiques paramétrées en température et pression (Haar *et al.*, 1984). Elle simplifie seulement le calcul si on utilise une formule explicite comme celles proposées par Irvine & Liley (1984)

$$\rho_L = \rho_L(T_L, p) \approx \rho_{Lsat}(T_L) \quad (\text{E.84})$$

Les propriétés de la vapeur peuvent être approchées de la même façon. Soit en utilisant l'approximation des gaz parfaits soit en utilisant des tables,

$$\rho_V = \rho_V(T_V, p_V) \quad (\text{E.85})$$

où on aura remarqué que la pression intervenant ici est la pression partielle de la vapeur. En définitive, on retiendra les dépendances suivantes pour les masses volumiques,

$$\rho_a = \rho_a(p_a, T_G), \quad (\text{E.86})$$

$$\rho_L = \rho_L(T_L), \quad (\text{E.87})$$

$$\rho_V = \rho_V(p_V, T_G), \quad (\text{E.88})$$

dont seules les dérivées apparaissent dans les équations de bilan de masse.

E.10.2 Enthalpie

Les relations d'état relatives à l'enthalpie se traitent d'une manière analogue à celles qui sont relatives à la masse volumique. On peut soit adopter les relations d'état des gaz parfaits pour lesquelles la capacité thermique massique C_p est constante où bien utiliser des modèles thermodynamiques complets.

L'enthalpie de la vapeur et du liquide ont les mêmes dépendances que les masses volumiques correspondantes et on peut d'ailleurs pratiquer les mêmes approximations. Pour la vapeur et les incondensables on aura,

$$i_V = i_V(T_G, p_V) \quad (\text{E.89})$$

$$i_a = i_a(T_G, p_a) = i_{a0} + \tilde{i}_a(T_G, p_a) \approx i_{a0} + C_{pa}T_G \quad (\text{E.90})$$

où i_{a0} est une constante sur la définition de laquelle nous reviendrons plus tard. Il est clair que le liquide n'est jamais à saturation et qu'il faut un modèle complet pour son enthalpie. Toutefois, comme pour la masse volumique, on remarque que l'enthalpie est surtout fonction de la température et que l'on peut l'évaluer sans grand risque d'erreur dans les conditions de saturation pour la même température,

$$i_L = i_L(T_L, p) \approx i_L(T_L, p_{Lsat}(T_L)) = i_{Lsat}(T_L). \quad (\text{E.91})$$

Les propriétés du gaz, sont évaluées par pondération massique puisque l'enthalpie est une grandeur extensive (attachée à la masse). En conséquence,

$$i_G = ci_V + (1 - c)i_a. \quad (\text{E.92})$$

Deux remarques s'imposent ici. L'origine des enthalpies de l'eau liquide et vapeur est identique dans les modèles thermodynamiques puisqu'elle est en fait unique pour le fluide considéré quelque soit son état. Un modèle de gaz parfait comme (E.90) n'a aucune raison d'être cohérent avec celui de l'eau et en conséquence la constante i_{a0} devrait être déterminée pour assurer cette cohérence. Toutefois, on comprend bien que cette constante est non essentielle et que l'écriture des bilans doit en être indépendante.

Par simple substitution, on montre que l'expression du bilan d'enthalpie du mélange (E.35) possède la même forme qu'elle soit exprimée en i_a ou en \tilde{i}_a . La différence entre ces deux équations est toujours proportionnelle à i_{a0} multiplié par un facteur identiquement nul. Ce facteur est proportionnel au bilan de masse des incondensables (E.10). Par ailleurs, on montre par la même méthode que la combinaison linéaire des bilans de masse et d'énergie servant à simplifier l'équation d'énergie possède la même propriété. En comparant les deux calculs, avec

i_a ou \tilde{i}_a , on observe que la différence entre les deux équations est toujours proportionnelle à un bilan de masse qui doit être identiquement vérifié par ailleurs.

L'équation (E.92) montre que l'enthalpie du gaz et une fonction explicite de 4 variables,

$$i_G = f(T_G, p_a, p_V, c). \quad (\text{E.93})$$

L'élimination de p_a et de c , s'effectue simplement en remarquant que d'après la définition de la fraction massique de vapeur c ,

$$\frac{c}{1-c} = \frac{\rho_V}{\rho_a} = \frac{\rho_V(T_G, p_V)}{\rho_a(T_G, p_a)} = \frac{\rho_V(T_G, p_V)}{\rho_a(T_G, p - p_V)}. \quad (\text{E.94})$$

En résolvant cette équation pour déterminer c , il vient clairement que,

$$c = c(p, p_V, T_G), \quad (\text{E.95})$$

où l'on remarque que si on adopte la relation des gaz parfaits pour chaque composant du gaz, il n'y a plus de dépendance en température. En substituant dans (E.93) cette dernière relation, on montre que,

$$i_G = f(T_G, (p - p_V), p_V, c(p, p_V, T_G)) = i_G(p, p_V, T_G). \quad (\text{E.96})$$

Cette relation permet de calculer correctement les dérivées partielles de i_G apparaissant dans le bilan d'énergie du mélange. En conclusion, les propriétés thermiques des composants dépendent des variables principales par,

$$i_a = i_a(p_a, T_G) \quad (\text{E.97})$$

$$i_L = i_L(T_L) \quad (\text{E.98})$$

$$i_V = i_V(p_V, T_G) \quad (\text{E.99})$$

$$i_G = i_G(p, p_V, T_G) \quad (\text{E.100})$$

$$(\text{E.101})$$

E.10.3 Propriétés physiques

Les relations de fermeture font intervenir de nombreuses propriétés physiques qu'il s'agit de calculer ici. Selon les relations de fermetures envisagées, ces dernières doivent être évaluées à des pressions et températures différentes. En général, les propriétés physiques relatives aux corrélations de transferts de chaleur et de masse sont évaluées à la température dite de film,

$$T_F = \frac{1}{3}(2T_G + T_{Li}) \quad (\text{E.102})$$

Les propriétés de transport du mélange peuvent être décrites par des formules assez compliquées (Perry & Green, 1984, p. 3-279 et 3-283), dont le terme principal est une pondération massique. Par souci de simplification, on posera

$$\mu_G = c\mu_V + (1-c)\mu_a, \quad (\text{E.103})$$

$$k_G = ck_V + (1-c)k_a. \quad (\text{E.104})$$

La même référence fournit des indications sur l'évolution de ces grandeurs avec la température.

E.11 Forme finale des équations

Un choix possible des 7 variables indépendantes est le suivant,

$$\alpha, v_L, v_G, p, T_G, p_V, T_L, \quad (\text{E.105})$$

Par ailleurs, les équations de bilan sont classiquement combinées entre elles pour alléger l'écriture du système. On ne s'intéressera ici qu'aux solutions stationnaires du problème ($\partial/\partial t \equiv 0$). Le bilan de masse des incondensables (E.10) se transforme alors en,

$$\rho_a v_G \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha \rho_a \frac{\partial v_G}{\partial z} + \alpha v_G \frac{\partial \rho_a}{\partial p_a} \frac{\partial p}{\partial z} + \alpha v_G \frac{\partial \rho_a}{\partial T_G} \frac{\partial T_G}{\partial z} - \alpha v_G \frac{\partial \rho_a}{\partial p_a} \frac{\partial p_V}{\partial z} = -\frac{\alpha \rho_a v_G}{A} \frac{dA}{dz}. \quad (\text{E.106})$$

Le bilan de masse du liquide (E.2) ne pose pas de problème particulier. En posant,

$$\Gamma = \overline{\Gamma_2} = \nless \gamma \nless 2, \quad (\text{E.107})$$

on obtient,

$$-\rho_L v_L \frac{\partial \alpha}{\partial z} + (1 - \alpha) \rho_L \frac{\partial v_L}{\partial z} + (1 - \alpha) v_L \frac{\partial \rho_L}{\partial T_L} \frac{\partial T_L}{\partial z} = -\Gamma \overline{\dot{m}_L} >_i - \frac{(1 - \alpha) \rho_L v_L}{A} \frac{dA}{dz}. \quad (\text{E.108})$$

Le bilan de la vapeur (E.9) s'écrit,

$$\rho_V v_G \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha \rho_V \frac{\partial v_G}{\partial z} + \alpha v_G \frac{\partial \rho_V}{\partial T_G} \frac{\partial T_G}{\partial z} + \alpha v_G \frac{\partial \rho_V}{\partial p_V} \frac{\partial p_V}{\partial z} = \Gamma \overline{\dot{m}_L} >_i - \frac{\alpha \rho_V v_G}{A} \frac{dA}{dz}. \quad (\text{E.109})$$

Le bilan de quantité de mouvement du mélange est combiné avec les bilans de masse du liquide et du gaz ([E.31]− v_G [E.10+E.9]− v_L [E.2]). On obtient alors,

$$(1 - \alpha) \rho_L v_L \frac{\partial v_L}{\partial z} + \alpha \rho_G v_G \frac{\partial v_G}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{P}{A} \overline{\tau_W} >_W + (v_G - v_L) \Gamma \overline{\dot{m}_L} >_i. \quad (\text{E.110})$$

Le bilan de quantité de mouvement de la phase dispersée (E.21) est combiné avec le bilan de masse de la phase dispersée ([E.21]− v_L [E.2]). On obtient,

$$\rho_L v_L \frac{\partial v_L}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Gamma}{1 - \alpha} (\overline{\dot{m}_L v_L} >_i - \overline{\dot{m}_L} >_i v_L) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \overline{\mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z} >_i. \quad (\text{E.111})$$

En absence d'informations précises, si on admet la fermeture (E.65), les deux premiers termes du membre de droite sont du même ordre de grandeur et on supposera qu'ils se compensent exactement. De toutes façons, pris individuellement, chacun de ces termes est probablement petit devant le frottement interfacial (le troisième terme). Le bilan de quantité de mouvement du liquide se simplifie alors en,

$$\rho_L v_L \frac{\partial v_L}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = +\frac{\Gamma}{1 - \alpha} \overline{\mathbf{n}_L \cdot \mathbb{V}_L \cdot \mathbf{n}_z} >_i. \quad (\text{E.112})$$

Le bilan d'énergie totale est combinée avec le bilan de masse du liquide et du gaz ([E.35]−($i_G + 1/2 v_G^2$)[E.10+E.9]−($i_L + 1/2 v_L^2$)[E.2]). On obtient pour cette équation,

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \rho_L v_L^2 \frac{\partial v_L}{\partial z} + \alpha \rho_G v_G^2 \frac{\partial v_G}{\partial z} + \alpha \rho_G v_G \frac{\partial i_G}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \alpha \rho_G v_G \frac{\partial i_G}{\partial T_G} \frac{\partial T_G}{\partial z} + \alpha \rho_G v_G \frac{\partial i_G}{\partial p_V} \frac{\partial p_V}{\partial z} \\ + (1 - \alpha) \rho_L v_L \frac{\partial i_L}{\partial T_L} \frac{\partial T_L}{\partial z} = \Gamma (i_L - i_G + \frac{1}{2} v_L^2 - \frac{1}{2} v_G^2) \overline{\dot{m}_L} >_i. \end{aligned} \quad (\text{E.113})$$

Le bilan d'énergie de la phase dispersée est la dernière équation du modèle. On la combine avec le bilan de masse de la phase dispersée d'une façon analogue à celle mise en oeuvre pour le bilan d'énergie du mélange ([E.33]−($i_L + \frac{1}{2} v_L^2$)[E.2]). On exprime ensuite le second membre en utilisant le bilan d'énergie à l'interface pour éliminer les termes relatifs aux flux coté liquide (E.71). On obtient finalement,

$$\rho_L v_L^2 \frac{\partial v_L}{\partial z} + \rho_L v_L \frac{\partial i_L}{\partial T_L} \frac{\partial T_L}{\partial z} = \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \overline{\dot{m}_L} >_i \left(i_L - i_{Vi} + \frac{1}{2} v_L^2 - \frac{1}{2} v_L^2 \right) + \frac{\Gamma}{1 - \alpha} \overline{\mathbf{q}_G \cdot \mathbf{n}_G} >_i \quad (\text{E.114})$$

où on aura remarqué que l'enthalpie du gaz, $i_{Gi} \neq i_G$, est évaluée au voisinage de l'interface.

E.12 Intégration numérique et conditions aux limites

Les équations de bilan (E.106), (E.108), (E.109), (E.110), (E.112), (E.113), (E.114) forment un système d'équations différentielles ordinaire quasi linéaire d'ordre 7 ou le vecteur représentant la solution représentée par le vecteur, \mathbf{X} , est construit à partir des variables indépendantes (E.105)

$$\mathbf{X} = (\alpha, v_L, v_G, p, T_G, p_V, T_L) \quad (\text{E.115})$$

Le système possède donc la forme suivante,

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} = \mathbf{C}(\mathbf{X}), \quad (\text{E.116})$$

E.12.1 Forme autonome

L'intégration de ce système est en principe possible pour toutes valeurs initiales données (\mathbf{X}_0). On obtient une solution qui représente un état du système. L'analyse de la topologie des solutions de ce type de système et la relation entre les points critiques du système et le phénomène de blocage sonique de débit est détaillée par Bilicki *et al.* (1987) ou Lemonnier & Bilicki (1994).

En dehors de ces conditions, c'est-à-dire pour des vitesses faibles relativement aux caractéristiques de propagation du système instationnaire associé à (E.116), il existe une solution régulière pour toutes valeurs des conditions choisies à l'amont. Elles peuvent être calculées simplement par une méthode d'intégration numérique comme celle de Runge-Kutta (Press *et al.*, 1992). Pour des raisons évoquées ailleurs (Lemonnier & Bilicki, 1994), on écrit le système sous forme autonome,

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} = \det(B_1, \dots, B_{i-1}, C, B_{i+1}, \dots, B_n), \quad i \in [1, n] \quad (\text{E.117})$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \det(\mathbf{B}) \quad (\text{E.118})$$

où le paramètre n représente le nombre d'équations (7) et la dernière équation définit le paramètre d'avancement des solutions. Les déterminants se calculent numériquement en effectuant les produits des termes diagonaux des matrices triangularisées par une étape d'élimination de Gauss. Les solutions sont paramétrées par u ce qui présente l'avantage de pouvoir décrire les solutions possédant des tangentes verticales ($\partial/\partial z \rightarrow \infty$) ou éventuellement retournant vers l'origine ($\det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{B}(\mathbf{X}_0)) < 0$).

E.12.2 Conditions aux limites

Dans une expérience monophasique, ne comportant que du gaz et où l'écoulement reste subsonique, on se donne ou on mesure la pression amont et la pression aval et le débit de gaz en résulte. La pression amont peut, par exemple, être celle d'un grand réservoir et la pression aval est simplement imposée à l'aide d'une vanne placée à l'aval de la section d'essais.

Si l'on désire poser le problème numérique en termes de conditions initiales (en u) il suffit d'imposer un débit à l'amont et la pression à l'aval et d'ajuster le premier pour obtenir la pression aval mesurée. Une méthode de tir peut être alors mise en oeuvre pour le déterminer.

En écoulement diphasique, le principe est le même, toutefois, le débit de liquide peut être imposé indépendamment comme un paramètre supplémentaire. Dans l'expérience, il suffit d'utiliser une pompe volumétrique qui fournira le débit indépendamment de la pression d'utilisation amont. Les températures des fluides sont des paramètres auxiliaires que l'on peut fixer indépendamment.

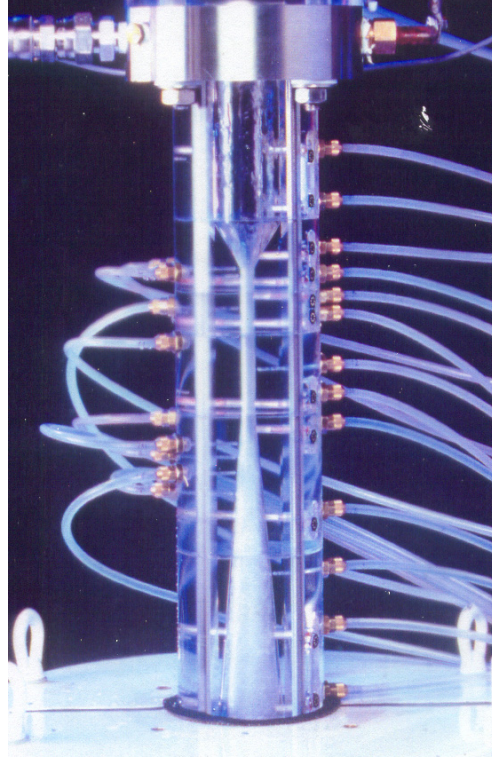


Figure E.1: Tuyère convergente divergente de l'installation Fossegrimen (Selmer-Olsen, 1991). L'écoulement est vertical descendant.

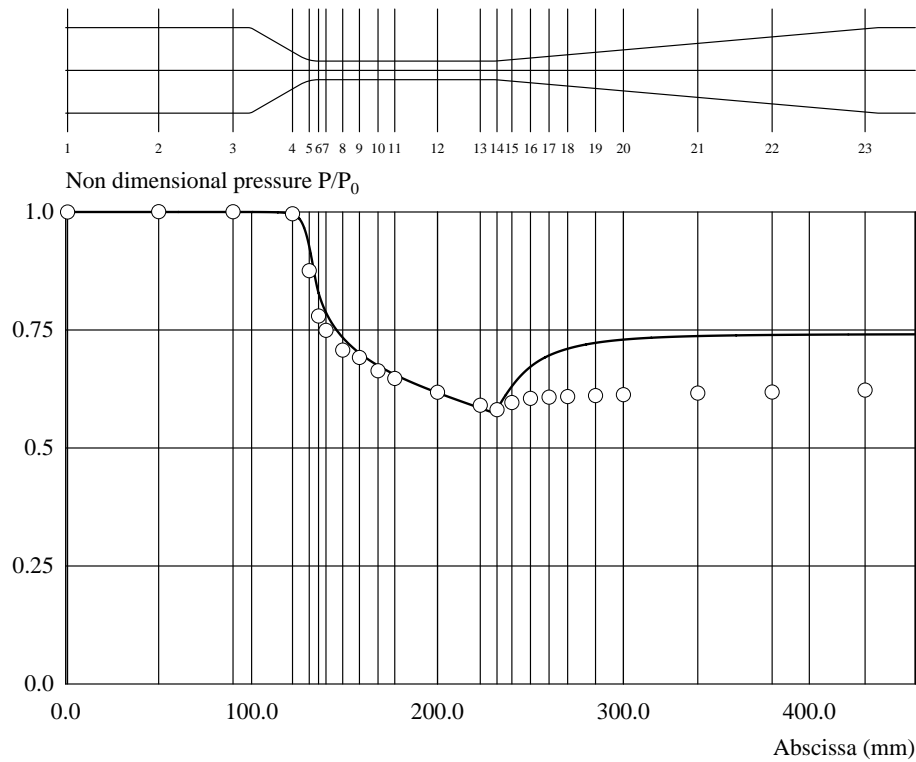


Figure E.2: Profil de pression calculé par DFMEC_ECP01.for. Ecoulement eau air dans dans une tuyère convergente divergente. Expérience : 60A37M36.pre, $M_G=204,1$ kg/h, $M_L=357,5$ kg/h, $p_0=5,991$ bar, $T_G=18,6^\circ\text{C}$, $T_G=19,3^\circ\text{C}$, $P_{14}=3,482$ bar. Le calcul fournit $M_G=195,9$ kg/h.

En définitive, on se donne la pression amont p_0 , le débit de liquide, M_L , la température de chaque fluide à l'entrée T_L et T_G , ainsi que la pression aval p_b . Pour obtenir les coordonnées du vecteur \mathbf{X}_0 encore non déterminées, on peut procéder de différentes façons selon les caractéristiques du dispositif de mélange des phases s'il en existe un à l'entrée. Les masses volumiques sont calculées à l'entrée en fonction des valeurs de la pression et de la température de chaque phase.

En absence d'informations particulières, on peut par exemple supposer l'écoulement en équilibre mécanique à l'entrée. Le taux de vide est alors calculé à partir du titre volumique. On en déduit, connaissant le débit massique de chaque phase, la vitesse commune de chaque phase.

E.13 Validation du modèle

Selmer-Olsen (1991) a étudié les écoulements eau-air dans une tuyère convergente divergente dans l'installation Fossegripen dont la section d'essais est représentée à la figure E.1 et a développé un modèle analogue à celui détaillé ici. Il comporte un certain nombre de simplifications supplémentaires sur lesquelles on reviendra plus loin. Les tuyères utilisées ont un diamètre d'entrée de 46 mm et un diamètre au col de 10 mm dont la longueur est variable. Le col peut éventuellement être prolongé par une section divergente de faible ouverture angulaire. Dans la configuration présentée (figure E.1) le col possède une longueur de 100 mm environ. Les titres massiques de gaz de l'installation varient entre 1 et 0,05 environ, la configuration d'écoulement est proche de celle de l'écoulement annulaire dispersé.

Selmer-Olsen a modélisé l'écoulement en négligeant l'influence du film liquide observé à la paroi et bien visible à la figure E.1. Cet auteur a de plus supposé que toute la phase liquide est dispersée dans le gaz. Il a également calculé le diamètre moyen des gouttelettes à l'aide d'un modèle basé sur un équilibre local entre les gouttes et la turbulence : le diamètre maximum des gouttes stables est déterminé par un nombre de Weber critique, la turbulence menant à la rupture les gouttes dont le diamètre est supérieur à la limite donnée par ce critère, sous l'action des fluctuations de pression appliquée à leur surface. Ce type de modèle fournit une taille de gouttes qui diminue lorsque la vitesse (pression dynamique) de la phase continue augmente (Lemonnier & Selmer-Olsen, 1992).

La validation du modèle a été effectuée dans un premier temps en comparant les débits calculés et mesurés ainsi que les profils de pression. La validation a porté dans un second temps sur la détermination des tailles de gouttes et la caractérisation du film liquide (Camelo-Cavalcanti, 1993).

La figure E.2 montre qu'un accord acceptable est obtenu entre modèle et expérience. Le modèle a déterminé le débit transitant dans le système à 5% près ce qui dans le domaine est raisonnable. La figure appelle toutefois plusieurs commentaires.

Pour effectuer le calcul du débit, la pression n'a pas été imposée à la sortie de la tuyère (repère 23, à la figure E.2) mais à l'aval immédiat du col (repère 14, à la figure E.2). On observe que l'accord entre les profils expérimentaux et prédits est acceptable en amont de ce point, mais qu'il se dégrade significativement à l'aval.

Ce défaut est caractéristique des modèles 1D. En effet, dans le divergent l'écoulement décolle. On peut d'ailleurs observer la trace du décollement sur la figure E.1. En écoulement diphasique l'écoulement décolle beaucoup plus facilement qu'en écoulement monophasique. En effet, les deux phases n'ont pas du tout la même cohérence interne qu'un fluide unique et le cisaillement en paroi, appliqué sur le gaz, n'a pratiquement pas d'incidence sur le liquide.

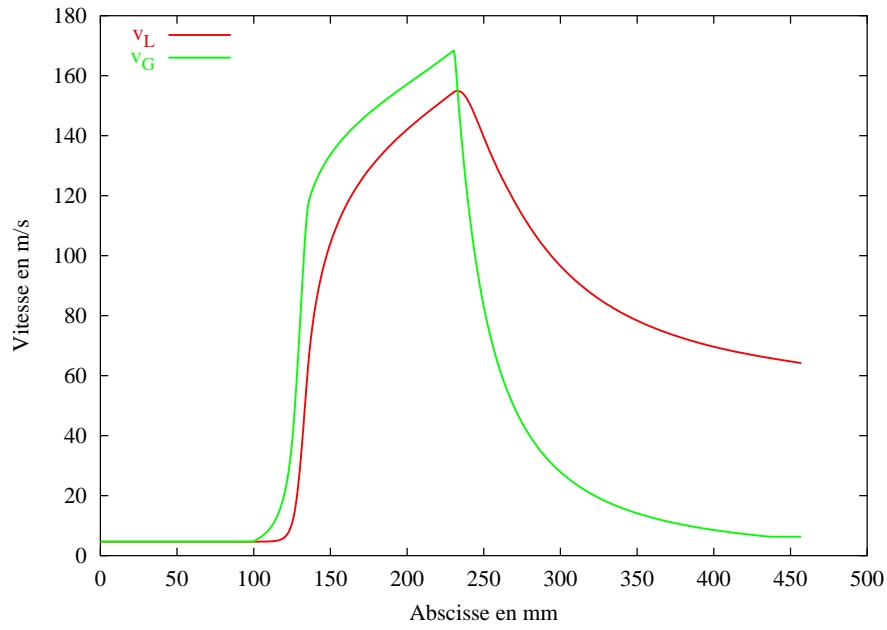


Figure E.3: Profil de vitesse calculé par DFMEC_ECP01.for. Ecoulement eau air dans dans une tuyère convergente divergente. Expérience : 60A37M36.pre, $M_G=204,1$ kg/h, $M_L=357,5$ kg/h, $p_0=5,991$ bar, $T_G=18,6^\circ\text{C}$, $T_G=19,3^\circ\text{C}$, $P_{14}=3,482$ bar.

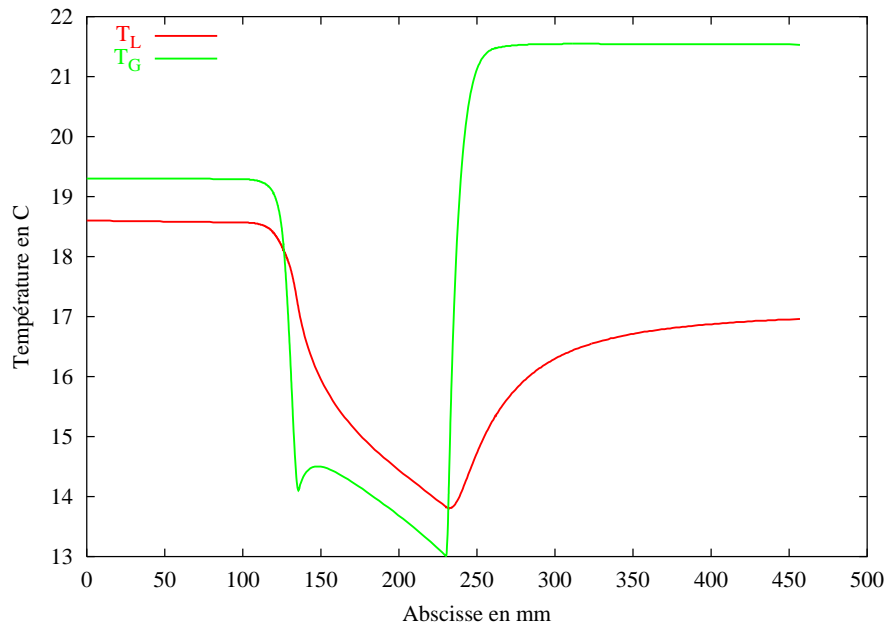


Figure E.4: Profil de vitesse calculé par DFMEC_ECP01.for. Ecoulement eau air dans dans une tuyère convergente divergente. Expérience : 60A37M36.pre, $M_G=204,1$ kg/h, $M_L=357,5$ kg/h, $p_0=5,991$ bar, $T_G=18,6^\circ\text{C}$, $T_G=19,3^\circ\text{C}$, $P_{14}=3,482$ bar.

Le décollement induit l'existence d'un profil de vitesse très accusé qui est une violation patente de l'hypothèse constitutive des modèles 1D. En effet, lorsque le profil de vitesse n'est pas plat, la moyenne du carré de la vitesse sont liés par,

$$\langle v_k^2 \rangle_2 = C_k \langle v_k \rangle_2^2 \quad (\text{E.119})$$

où le coefficient de corrélation spatial des vitesses C_k est inférieur à 1 et ne dépend que de la forme du profil. Le bilan de quantité de mouvement (E.110) prenant en compte cet effet s'écrit,

$$(1 - \alpha)\rho_L v_L \frac{\partial C_L v_L}{\partial z} + \alpha\rho_G v_G \frac{\partial C_G v_G}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \dots \quad (\text{E.120})$$

où les coefficients C_L et C_G sont inférieurs à 1. En ne prenant pas en compte le caractère bidimensionnel de l'écoulement ($C_k = 1$), on surestime les termes d'accélération, principalement équilibrés par le gradient de pression qu'on surestime alors à son tour. C'est bien la tendance observée à la figure E.2.

La figure E.3 montre que le gaz, plus léger, accélère plus rapidement que le liquide. Ce dernier est entraîné par le gaz sous l'action de la traînée dans le convergent et le col de la tuyère. Il coule donc moins vite que le gaz. Dans le divergent, la tendance s'inverse exactement, le liquide dépasse le gaz en raison de son inertie plus importante.

La figure E.4 montre globalement que la température évolue peu. L'écoulement est pratiquement isotherme. La détente du gaz dans le convergent le refroidit, ce qui provoque un transfert de chaleur du liquide vers le gaz. La température du liquide baisse à son tour. La chute de température est beaucoup plus faible qu'en monophasique où elle pourrait atteindre une centaine de degrés.

Le changement de phase est quasi nul dans cette configuration, le titre massique de vapeur dans le gaz, c n'est que de 3 pour mille environ au col. Cette valeur est à comparer au titre massique liquide en entrée qui est de l'ordre de 64%. Une infime partie du liquide s'est donc évaporée. C'est pourquoi, Selmer-Olsen (1991) a décrit ces expériences avec un modèle beaucoup plus simple que celui présenté ici. Ce dernier ne comporte qu'une seule température (une seule équation d'énergie pour le mélange) et pas de changement de phase ($c = 0$). On obtient d'ailleurs des résultats acceptables en supposant de plus que la température est constante et égale à la température de mélange des fluides. On ne prend pas en compte le bilan d'énergie du mélange et le modèle ne comporte plus que 4 équations.

E.14 Effets de la taille des gouttes, du changement de phase et de la modélisation de l'aire interfaciale

L'objet de ce paragraphe est de montrer l'influence de la modélisation de l'aire interfaciale, qui se réduit, pour un écoulement dispersé, au modèle de diamètre moyen des gouttes.

La configuration étudiée est identique à celle de la figure E.2, toutefois, le divergent a été démonté et la tuyère se termine à l'aval du col. On recherche le débit maximum pouvant transiter dans le système pour des conditions amont données. Le débit de gaz est limité par la compressibilité du mélange diphasique qui entraîne un blocage sonique. On recherche ce régime numériquement en utilisant la méthode *PIF* décrite par exemple par Lemonnier & Selmer-Olsen (1992).

Dans les expériences de Camelo-Cavalcanti (1993), le diamètre de gouttelettes a été déterminé par anémométrie laser à phase Doppler et on a observé un diamètre de l'ordre de 20 à 40 μm

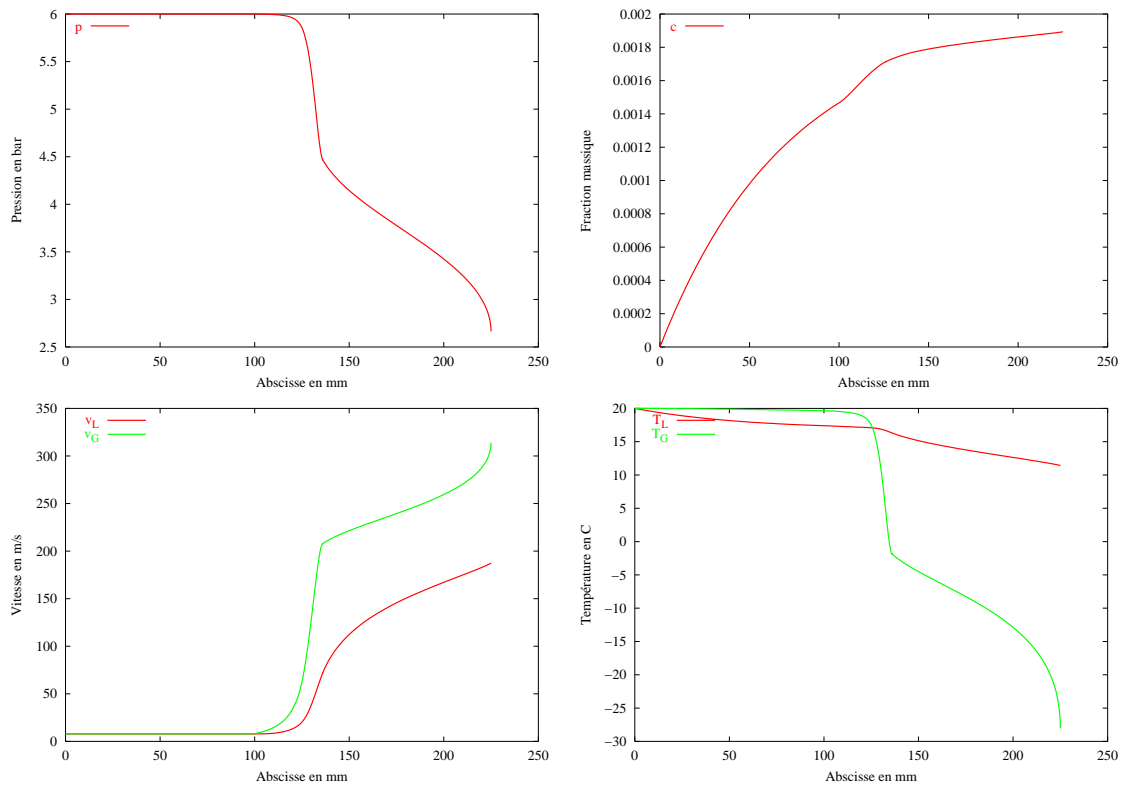


Figure E.5: Evolution de la pression, de la fraction massique de vapeur, des vitesses et températures des phases pour un écoulement eau-air dans la tuyère de la figure E.2 tronquée avant son divergent. $M_L=100$ kg/h, $p_0=6$ bar, $T_L=20^\circ\text{C}$, $T_G=20^\circ\text{C}$, diamètre de gouttelettes constant et égal à $100\ \mu\text{m}$. Résultat du calcul, débit maximum de gaz, $M_G=332,93$ kg/h ce qui correspond à un titre massique liquide de 23% à l'entrée.

selon les conditions. Les figures E.5 et E.6 montrent les résultats de calcul pour deux diamètres de gouttes considérés constants et placés de part et d'autre des valeurs observées : 100 et $10\ \mu\text{m}$.

Dans les deux cas, la mise en vitesse du liquide est progressive et a lieu dans le convergent et le col. Il est clair que plus le diamètre de gouttes est faible plus l'écart de vitesse entre phase est réduit. Dans les deux cas, le changement de phase est non significatif. Il est bien visible que le profil de pression n'est pas très sensible à la modélisation de l'aire interfaciale. Toutefois, Le débit de gaz, en condition de blocage sonique, y est sensible, il varie de 6% environ entre les deux configurations, ce qui est mesurable.

Les profils de températures suivent les mêmes évolutions. Plus l'aire interfaciale est grande, plus la détente du gaz est mitigée par le liquide. Les effets du changement de phase ne sont pas significatifs ici. Toutefois, on observe que la petitesse du diamètre des gouttes entraîne un changement de phase et surtout un transfert de chaleur entre les phases plus précoce.

Avec le modèle de fractionnement turbulent de Selmer-Olsen (1991), on observe que le diamètre moyen des gouttes prédit évolue principalement dans le convergent. Cet effet a été recherché car il correspond effectivement aux observations : l'atomisation a lieu principalement au col. On observe que le changement de phase ne débute alors que dans le col contrairement à ce que montrent les prédictions à diamètre de gouttelettes constant. Le changement de phase n'étant pas significatif dans ces conditions, cette subtilité de modélisation n'a que peu d'impact sur le profils de pression.

Dans les trois cas, on observe que le maximum de vitesse est atteint à la fin du col, ce qui est en accord avec l'analyse de Lemonnier & Bilicki (1994). La vitesse atteinte est de l'ordre de

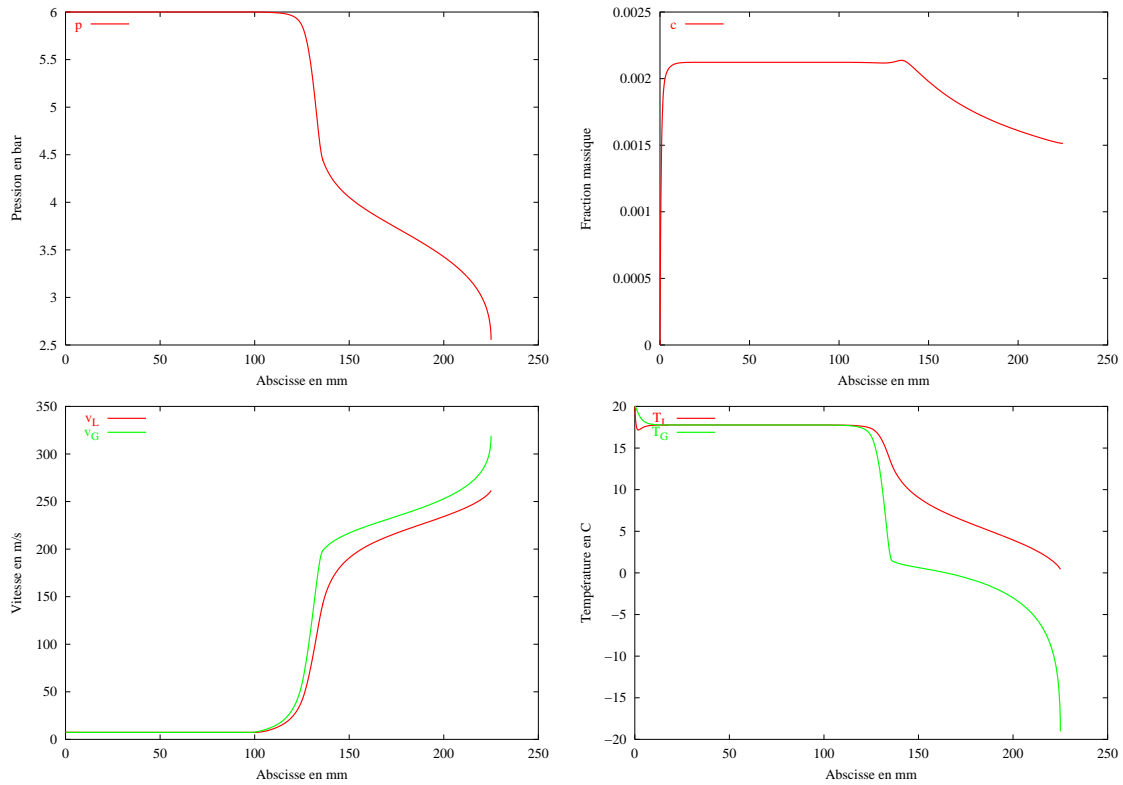


Figure E.6: Evolution de la pression, de la fraction massique de vapeur, des vitesses et températures des phases pour un écoulement eau-air dans la tuyère de la figure E.2 tronquée avant son divergent. $M_L=100$ kg/h, $p_0=6$ bar, $T_L=20^\circ\text{C}$, $T_G=20^\circ\text{C}$, diamètre de gouttelettes constant et égal à $10\ \mu\text{m}$. Résultat du calcul, débit maximum de gaz, $M_G=313,13$ kg/h ce qui correspond à un titre massique liquide de 24% à l'entrée.

la vitesse du son ($\sqrt{\gamma RT}$).

Les figures E.8, E.9 et E.10 montrent les résultats des calculs effectués dans les mêmes conditions que précédemment, mais, pour un gaz chaud. L'effet du diamètre de gouttes sur la mise en vitesse est identique à froid et à chaud. La différence principale réside principalement sur les aspects thermiques. La fraction vaporisée à la sortie du dispositif est multipliée par 5 environ pour les gouttes les plus petites où le refroidissement a lieu de façon très précoce dans la partie à basse vitesse de l'écoulement.

A la figure E.8, où le diamètre de gouttes est le plus important, on observe nettement le mécanisme de transfert thermique car il est davantage progressif. Dans la partie à basse vitesse, la température du liquide est faible, la pression de vapeur à l'interface est faible et l'air entrant dans la tuyère étant initialement sec, le changement de phase entre le gaz et le liquide est faible puisqu'il est contrôlé par cet écart de pression. Le flux de chaleur convectif apporté au liquide ne sert donc pratiquement qu'à chauffer la goutte. Lorsque la goutte a atteint une température suffisante, la pression de vapeur à l'interface étant une fonction rapidement croissante de la température du liquide, l'évaporation commence à devenir significative et le transfert de chaleur résulte principalement du changement de phase.

On observe également ces deux phases sur la figure E.9 mais bien sûr elles se déroulent plus rapidement puisque l'aire d'échange entre les phases est plus importante. Dans ce dernier cas, on atteint rapidement la température de mélange et l'équilibre thermique est pratiquement atteint avant d'arriver au col. On observe aussi que la vitesse maximale est atteinte à l'extrémité du col, ce qui est analogue aux situations analysées précédemment (à froid).

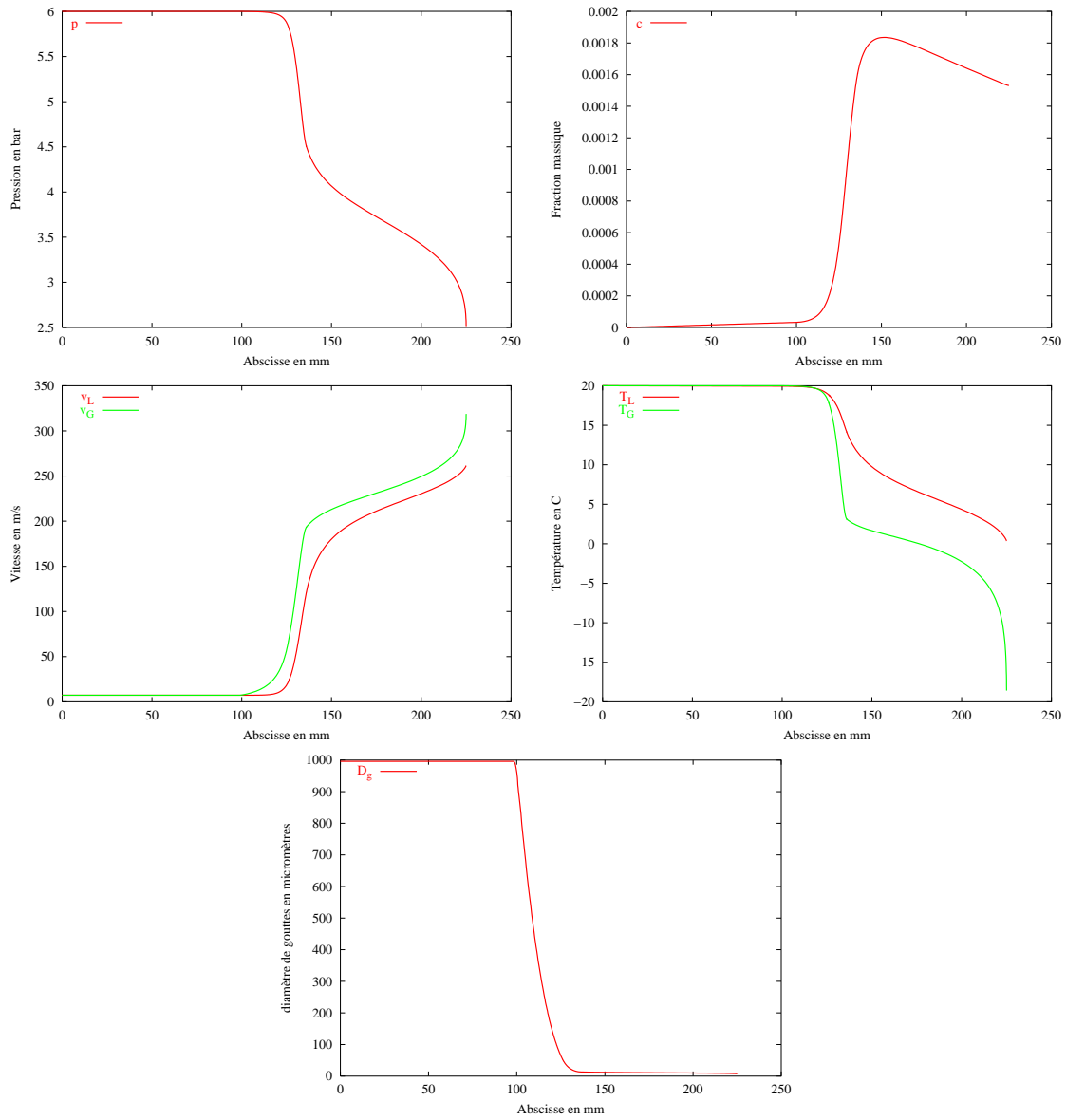


Figure E.7: Evolution de la pression, de la fraction massique de vapeur, des vitesses et températures des phases pour un écoulement eau-air dans la tuyère de la figure E.2 tronquée avant son divergent. $M_L=100$ kg/h, $p_0=6$ bar, $T_L=20^\circ\text{C}$, $T_G=20^\circ\text{C}$, diamètre de gouttelettes modélisé par le modèle de Selmer-Olsen (1991). Résultat du calcul, débit maximum de gaz, $M_G=307,45$ kg/h ce qui correspond à un titre massique liquide de 25% à l'entrée.

Lorsque l'on utilise le modèle de fractionnement turbulent, on observe une évolution radicalement différente de tous les paramètres (figure E.10). La vitesse maximale est atteinte à l'entrée du col et le changement de phase ne prend place que dans le col où se succèdent très rapidement les deux phases de mise en température des gouttes et évaporation. Le changement de phase est significatif et la décélération du gaz dans le col peut sembler à première vue déroutante. Elle s'interprète pourtant simplement car elle ressemble à l'écoulement d'un gaz compressible soumis à un refroidissement intense : la masse volumique du gaz croît et en raison du bilan de masse, avec une section constante, l'effet principal résultant est le ralentissement de l'écoulement de gaz. Les gouttelettes, en raison de leur inertie se trouvent alors décélérées et leur vitesse est maintenant supérieure à celle du gaz dans le col.

La modélisation de l'aire interfaciale est donc dans ce dernier cas déterminante sur l'évolution de l'écoulement puisqu'elle contrôle le déroulement des différentes phases de retour vers l'équilibre thermique et mécanique ainsi que leur ordre d'apparence respectif.

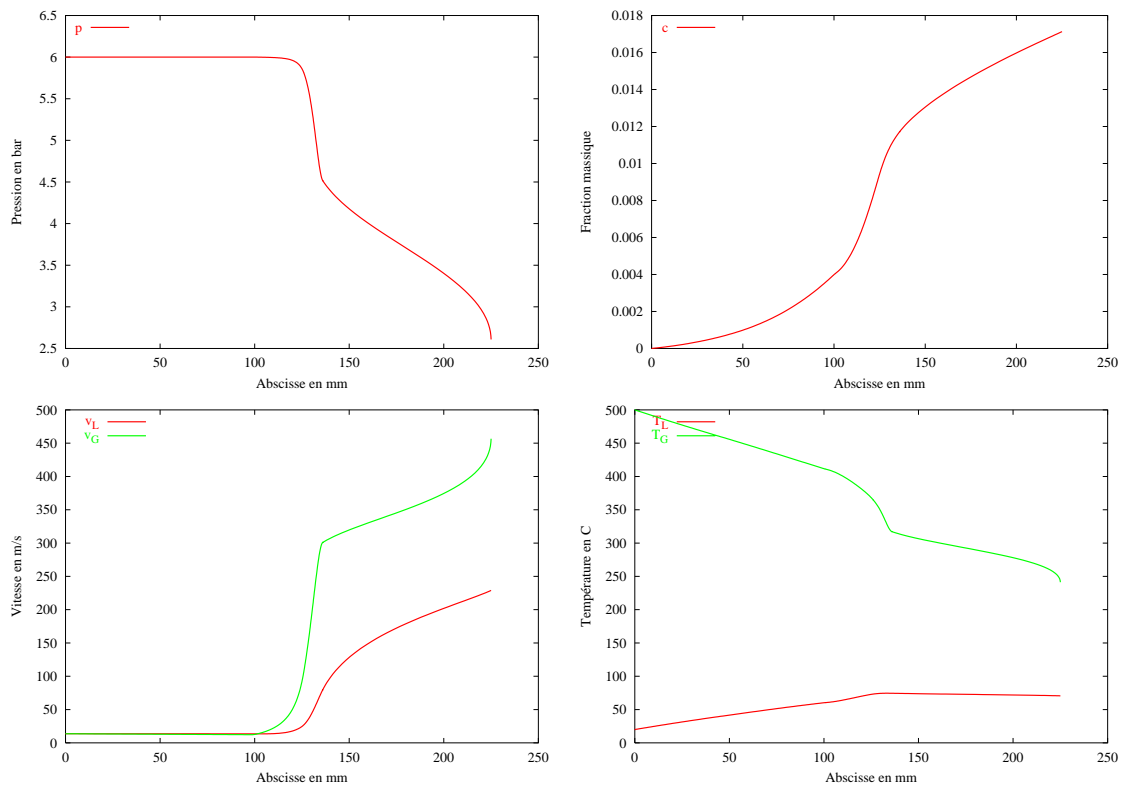


Figure E.8: Evolution de la pression, de la fraction massique de vapeur, des vitesses et températures des phases pour un écoulement eau-air dans la tuyère de la figure E.2 tronquée avant son divergent. $M_L=100$ kg/h, $p_0=6$ bar, $T_L=20^\circ\text{C}$, $T_G=500^\circ\text{C}$, diamètre de gouttelettes constant et égal à $100\ \mu\text{m}$. Résultat du calcul, débit maximum de gaz, $M_G=220.44$ kg/h ce qui correspond à un titre massique liquide de 31% à l'entrée.

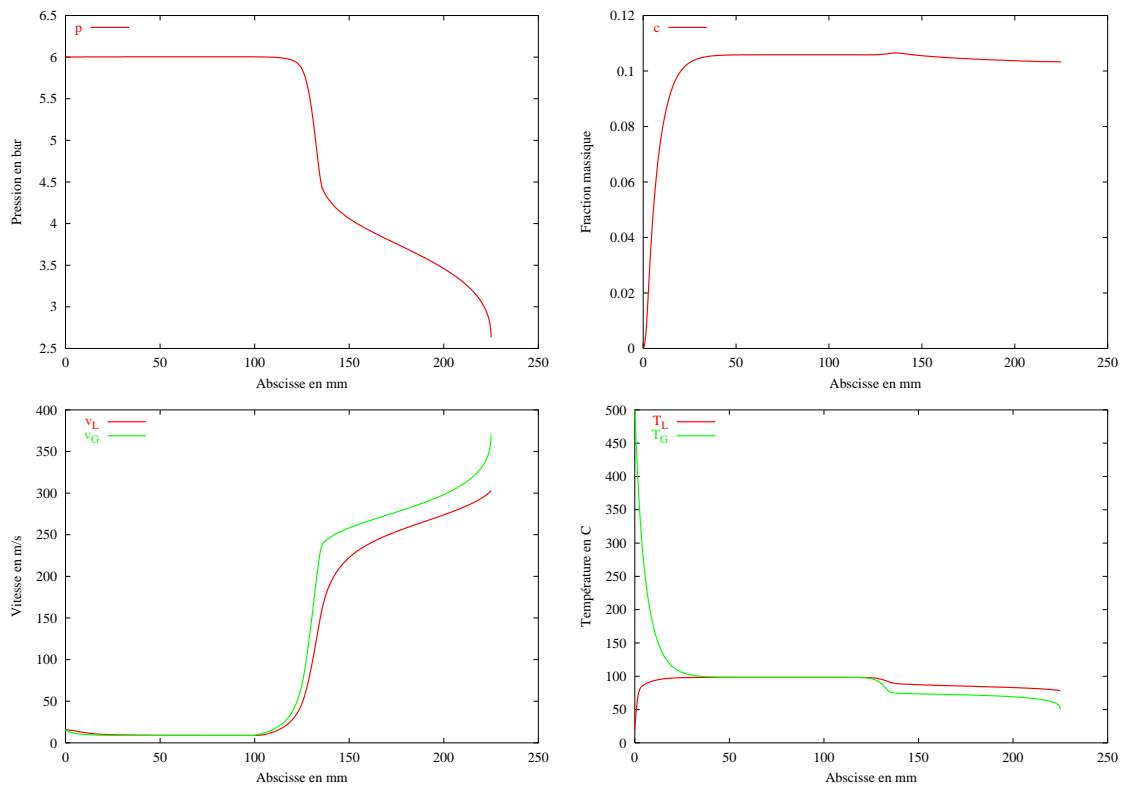


Figure E.9: Evolution de la pression, de la fraction massique de vapeur, des vitesses et températures des phases pour un écoulement eau-air dans la tuyère de la figure E.2 tronquée avant son divergent. $M_L=100$ kg/h, $p_0=6$ bar, $T_L=20^\circ\text{C}$, $T_G=500^\circ\text{C}$, diamètre de gouttelettes constant et égal à $10\ \mu\text{m}$. Résultat du calcul, débit maximum de gaz, $M_G=249,05$ kg/h ce qui correspond à un titre massique liquide de 29% à l'entrée.

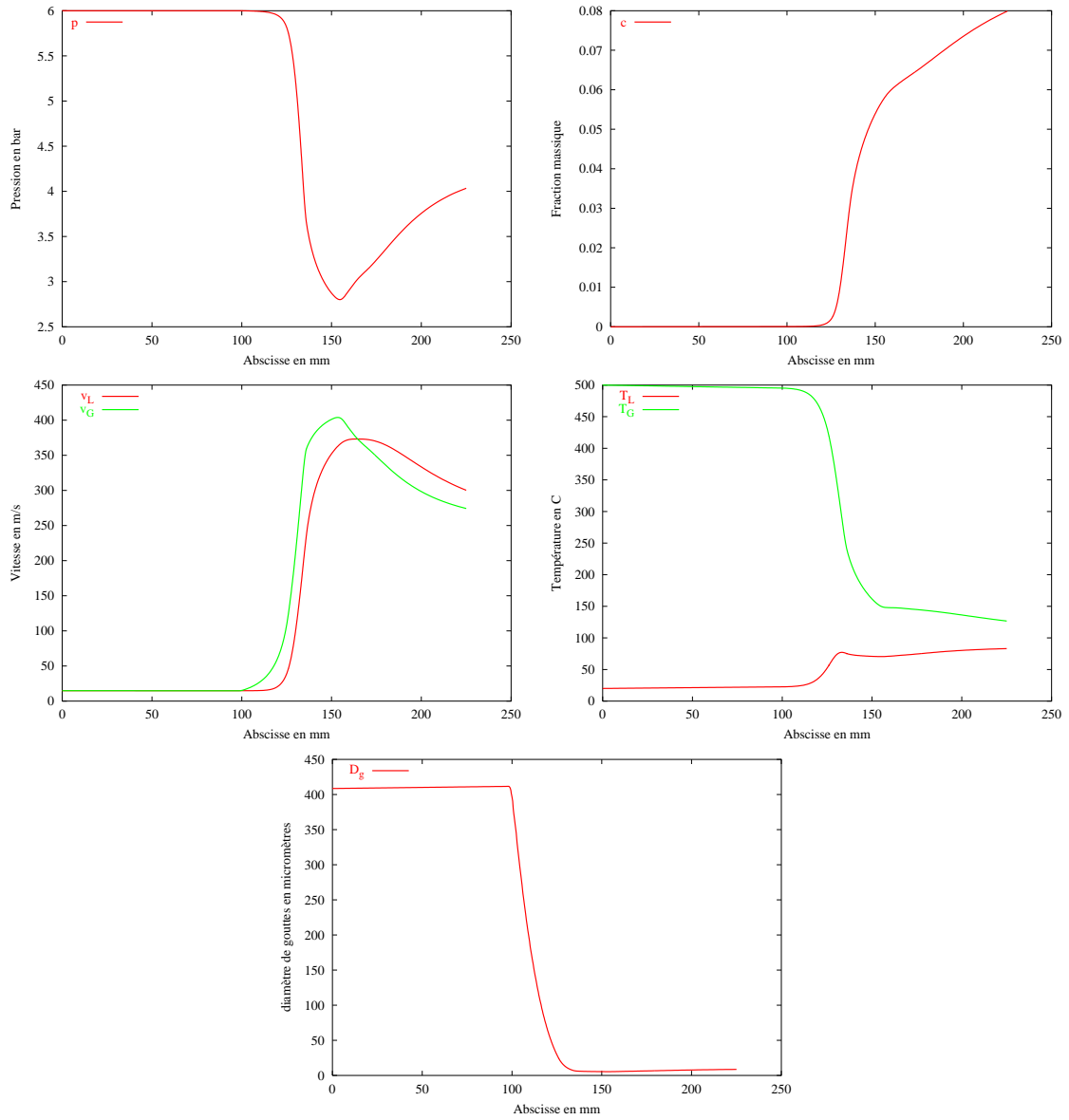


Figure E.10: Evolution de la pression, de la fraction massique de vapeur, des vitesses et températures des phases pour un écoulement eau-air dans la tuyère de la figure E.2 tronquée avant son divergent. $M_L=100$ kg/h, $p_0=6$ bar, $T_L=20^\circ\text{C}$, $T_G=500^\circ\text{C}$, diamètre de gouttelettes modélisé par le modèle de Selmer-Olsen (1991). Résultat du calcul, débit maximum de gaz, $M_G=237,84$ kg/h ce qui correspond à un titre massique liquide de 30% à l'entrée.

Annexe F

Problèmes résolus

Devoir surveillé d'écoulements diphasiques du 23 février 2001

Modalités

Cette partie du devoir surveillé comporte une série de questions de cours et deux exercices. Il porte sur les six séances de cours qui se sont échelonnées du 22 novembre 2000 au 10 janvier 2001. On demande de justifier avec soin toutes les réponses. Rédiger cette partie sur une copie séparée.

1 Flooding

Décrire le phénomène de flooding dans un tube vertical et son critère de détermination expérimentale.

2 Fonction indicatrice de phase

Comment définit-on la fonction indicatrice de phase dans un écoulement diphasique ? Quelle est la définition de la fraction surfacique du gaz dans un écoulement en conduite ? Donner sa relation avec la fonction indicatrice de phase.

3 Taux de vide

Comment définit-on le taux de vide local ? Décrire une méthode de mesure du taux de vide local.

4 Règle de Leibniz et théorème de Gauss

Enoncer la règle de Leibniz. Quel est son usage ? Etablir le bilan de masse phasique et à l'interface à partir du bilan de masse local écrit pour un volume fixe comportant une interface mobile, en appliquant la règle de Leibniz et le théorème de Gauss.

5 Expérience de Nukiyama

Décrire l'expérience de Nukiyama (1934) et décrire les différents régimes d'ébullition en vase.

6 Colonne de mousse statique

On place une solution moussante dans un bac. On dispose dans le bac un tube vertical ouvert à ses deux extrémités dont la base repose dans la solution moussante. On fabrique de la mousse en faisant buller du gaz sous la surface libre à l'intérieur du tube. Lorsque le résultat voulu est obtenu, on arrête l'alimentation en gaz puis on attend le retour du repos. Le tube est alors rempli d'une colonne de mousse stationnaire de hauteur H . On observe que la surface de séparation entre la mousse et la surface libre s'est alors enfoncée d'une hauteur h sous la surface libre du réservoir (voir figure F.1).

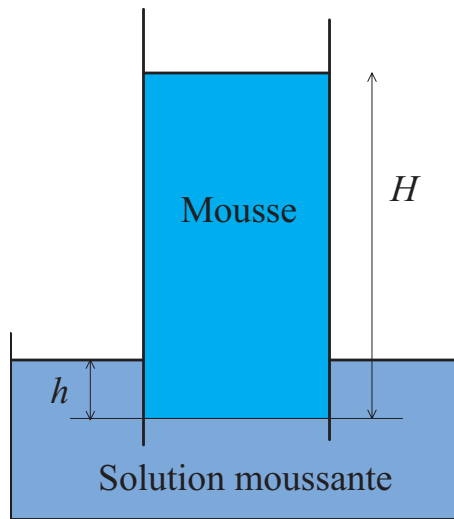


Figure F.1: Colonne de mousse au repos.

6.1 Différence de pression dans la mousse

Calculer la différence de pression entre le bas et le haut de la colonne de mousse, en fonction de la masse volumique du gaz, ρ_G , de celle du liquide, ρ_L , et du taux de vide moyen, α , dans la colonne de mousse.

6.2 Différence de pression dans le liquide

Calculer la différence de pression, dans le liquide entre la base de la colonne de mousse et la surface libre.

6.3 Taux de vide

En négligeant la masse volumique du gaz devant celle du liquide, en déduire comment on peut déterminer le taux de vide moyen dans la mousse en fonction de h et H .

7 Fonctionnement d'un *air-lift*

Une pompe par gas-lift est représentée à la figure F.2. Elle comprend un tube vertical de diamètre D plongé dans un grand réservoir d'eau sur une profondeur H . A la base du tube on injecte de l'air qui s'élève dans la colonne qui devient le siège d'un écoulement diphasique. Le régime stationnaire s'établit et on observe dans le tube un écoulement diphasique qui se déverse à une hauteur h au-dessus de la surface du réservoir qui est à la pression atmosphérique. On se donne le débit volumique de gaz, Q_G , alimentant la colonne et on va chercher à déterminer le débit de liquide, Q_L , pompé par le dispositif. Dès que cela sera possible, on négligera la masse volumique du gaz devant celle du liquide.

7.1 Equations de bilan

Dans l'approximation du modèle homogène écrire le bilan de masse et de quantité de mouvement moyenné dans la section. On appellera τ_W la contrainte de cisaillement pariétale, ρ la masse volumique du mélange diphasique, p la pression et w la vitesse moyenne du mélange.

7.2 Variation de pression par accélération

En supposant que l'écoulement du mélange est incompressible, en déduire que la variation de pression par accélération est nulle.

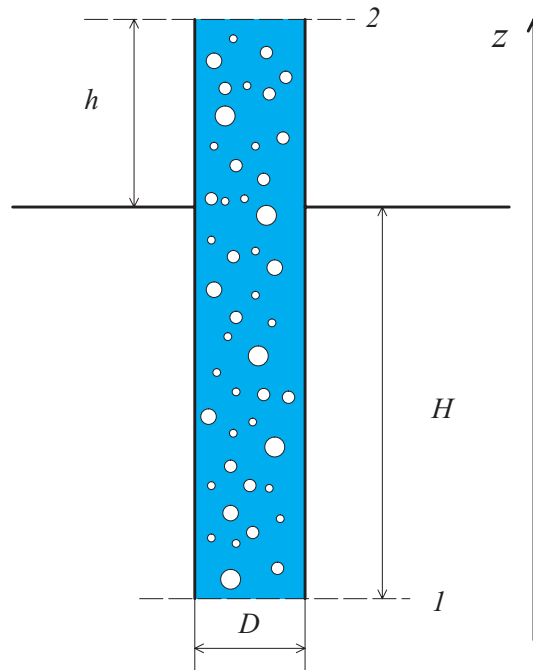


Figure F.2: Pompage par gas-lift. Régime permanent.

7.3 Différence de pression dans la colonne

En considérant la masse volumique moyenne du mélange et le cisaillement de paroi uniformes dans le tube, en déduire la différence de pression entre le haut et le bas de la colonne diphasique. On négligera les pertes de pression à l'entrée et à la sortie du tube.

7.4 Evaluation de la différence de pression

En négligeant les pertes de pression par accélération calculer, dans le liquide, la différence de pression entre la surface libre et la base du tube. En déduire une relation liant le taux de vide de l'écoulement diphasique, la masse volumique de chaque fluide, ρ_L et ρ_G , l'intensité de la pesanteur, le frottement pariétal et les dimensions du système.

7.5 Taux de vide

Exprimer le frottement pariétal en fonction d'un coefficient de frottement C_F que l'on considérera constant, de la masse volumique et de la vitesse moyenne du mélange. Exprimer ensuite la vitesse moyenne du mélange en fonction du débit de gaz connu et du taux de vide. En substituant ces expressions dans l'équation obtenue à la question précédente, montrer que le taux de vide est solution d'une équation algébrique de la forme,

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha}(\alpha - \alpha_0) = k \quad (\text{F.1})$$

où α_0 et k sont des constantes positives s'exprimant en fonction des données du problème. On négligera la masse volumique du liquide devant celle du gaz.

7.6 Application numérique

On donne le diamètre de la conduite $D = 50$ mm, le coefficient de frottement $C_F = 0,004$, le débit volumique de gaz, $Q_G = 5$ m³/h, l'intensité de la pesanteur $g = 9,81$ m/s². La profondeur immergée, $H = 1$ m et la hauteur émergeant, $h = 0,2$ m. Calculer α_0 et k . Quelle signification peut-on donner à α_0 ? En déduire par résolution numérique ou graphique une valeur du taux de vide à 0,01 près.

7.7 Débit de liquide

Dans l'approximation du modèle homogène, quelle relation simple existe-t-il entre les débits volumiques de liquide, de gaz et le taux de vide ? En déduire le débit de liquide pompé par le dispositif.

7.8 Régime d'écoulement

Quels sont les régimes d'écoulement diphasiques probables pour les conditions de fonctionnement ? Pensez-vous que l'hypothèse d'écoulement homogène soit justifiée ?

6 Colonne de mousse statique

On rappelle le schéma relatif à la question 6 (figure F.1) qui comporte les données géométriques du problème.

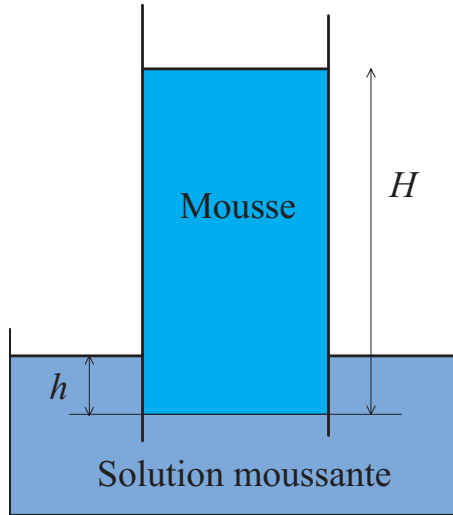


Figure F.1: Colonne de mousse au repos

6.1 Différence de pression dans la mousse

Le bilan de quantité de mouvement moyenné dans la section appliqué à la colonne de mousse, en absence de mouvement se réduit à,

$$p_1 - p_a = \rho_G g H \approx (1 - \alpha) \rho_L g H \quad (\text{F.1})$$

où p_a est la pression atmosphérique, p_1 la pression régnant à l'interface mousse liquide et ρ la masse volumique du mélange eau-air constituant la mousse. On a négligé la contribution de l'air comme l'a suggéré l'énoncé.

6.2 Différence de pression dans le liquide

Un bilan de quantité de mouvement moyenné appliqué à la colonne d'eau, en absence de mouvement se réduit à,

$$p_1 - p_a = \rho_L g h \quad (\text{F.2})$$

6.3 Taux de vide

En rapprochant les deux expressions précédentes (F.1) et (F.2) on obtient,

$$p_1 - p_a = (1 - \alpha) \rho_L g H = \rho_L g h, \quad (\text{F.3})$$

d'où l'on déduit aisément,

$$\alpha = 1 - \frac{h}{H}. \quad (\text{F.4})$$

Il suffit donc de déterminer les deux hauteurs h et H ce qui est simple si les parois sont transparentes pour obtenir par (F.4) le taux de vide moyen de la mousse.

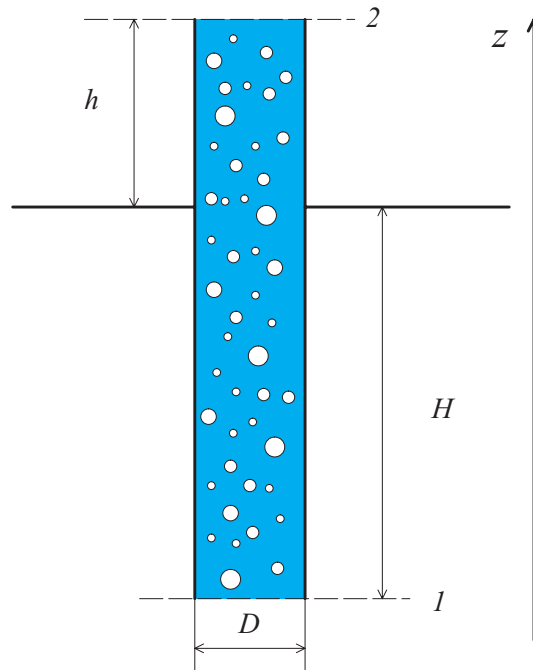


Figure F.2: Pompage par *gas-lift*. Régime permanent.

7 Fonctionnement d'un *air-lift*

Le schéma relatif à la question 7 est rappelé à la figure F.2.

7.1 Equations de bilan

On considère l'axe des z orienté vers le haut comme indiqué à la figure F.2. Le bilan de masse du mélange moyenné sur la section s'écrit en régime permanent ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$),

$$\frac{\partial}{\partial z} \rho w = 0, \quad (\text{F.5})$$

où l'on a considéré que la section de la conduite est constante. Le bilan de quantité de mouvement s'écrit dans les mêmes conditions avec les notations de l'énoncé,

$$\frac{\partial}{\partial z} \rho w^2 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_z - \frac{P}{A} \tau_w \quad (\text{F.6})$$

où F_z est la projection des forces de volume sur l'axe des z , τ_w est la projection de la contrainte de cisaillement sur le même axe, P est le périmètre de la conduite et A est l'aire de sa section droite.

7.2 Variation de pression par accélération

La variation de pression par accélération est représentée par le membre de gauche de (F.6). Si l'écoulement est incompressible, ρ est uniforme. Le bilan de masse se réduit donc à,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (\text{F.7})$$

En tenant compte du bilan de masse (F.5), la variation de pression par accélération se met sous la forme,

$$\frac{\partial}{\partial z} \rho w^2 = \rho w \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (\text{F.8})$$

La variation de pression par accélération est donc nulle en vertu du bilan de masse (F.7).

7.3 Différence de pression dans la colonne

En intégrant le bilan de quantité de mouvement entre z_1 et z_2 et en tenant compte de la nullité de la variation de pression par accélération et l'uniformité du frottement pariétal, on a,

$$0 = -(p_2 - p_1) + \rho(-g)(z_2 - z_1) - \frac{4\tau_W}{D}(z_2 - z_1), \quad (\text{F.9})$$

où l'on a considéré que la conduite possède une section circulaire et que le frottement est opposé au mouvement du fluide qui s'effectue vers le haut. En considérant que la pression dans la section 2 est la pression atmosphérique on obtient,

$$p_1 - p_a = \rho g(H + h) + \frac{4\tau_W}{D}(H + h). \quad (\text{F.10})$$

7.4 Evaluation de la différence de pression

Le bilan de quantité de mouvement dans le liquide au repos est identique à celui de l'exercice précédent,

$$p_1 - p_a = \rho_L g H. \quad (\text{F.11})$$

En conséquence, en rapprochant (F.10) et (F.11) on obtient,

$$\rho_L g H = \rho g(H + h) + \frac{4\tau_W}{D}(H + h), \quad (\text{F.12})$$

qui en prenant en compte la définition de la masse volumique du mélange,

$$\rho = (1 - \alpha)\rho_L + \alpha\rho_G, \quad (\text{F.13})$$

devient,

$$\alpha - \frac{\rho_L}{\rho_L - \rho_G} \frac{h}{H + h} = \frac{4\tau_W}{gD(\rho_L - \rho_G)} \quad (\text{F.14})$$

7.5 Taux de vide

La définition du coefficient de frottement pariétal et du débit volumique du gaz sont les suivantes,

$$\tau_W = \frac{1}{2} C_F \rho w^2, \quad (\text{F.15})$$

$$Q_G = A\alpha w. \quad (\text{F.16})$$

La vitesse moyenne du mélange est donc donnée par,

$$w = \frac{Q_G}{A\alpha}. \quad (\text{F.17})$$

En substituant (F.17) dans (F.15) puis l'expression obtenue dans (F.14) on obtient,

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}(\alpha - \alpha_0) = k \quad (\text{F.18})$$

où les constantes α_0 et k sont données par,

$$\alpha_0 = \frac{h}{H + h}, \quad (\text{F.19})$$

$$k = \frac{2C_F Q_G^2}{gDA^2}. \quad (\text{F.20})$$

7.6 Application numérique

Les données numériques du problème fournissent les valeurs suivantes des coefficients,

$$\alpha_0 = \frac{1}{6}, \quad (F.21)$$

$$k = 8,16 \cdot 10^{-3}. \quad (F.22)$$

La figure F.3 montre la fonction $f(\alpha)$ définie à l'équation (F.18). On observe sur le graphique que la solution de l'équation (F.18) se situe aux alentours de $\alpha = 0,26$.

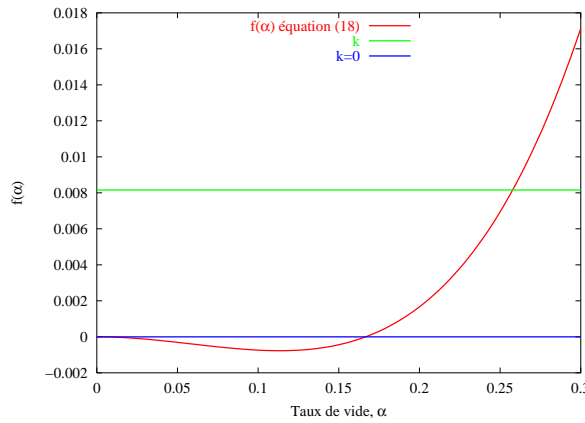


Figure F.3: Graphe de la fonction $f(\alpha)$ définie à l'équation (F.18).

On observe également sur la même figure que lorsque le coefficient de frottement diminue, la courbe verte ($y = k$) descend et atteint la limite $k = 0$ lorsque le frottement est nul. La solution de l'équation (F.18) suit la courbe $f(\alpha)$ dans ce processus et la solution tend vers α_0 lorsqu'il n'y a plus de frottement. En conséquence, α_0 représente le taux de vide que l'on aurait dans la colonne, en écoulement, en absence de frottement.

On peut aussi résoudre l'équation (F.18) par itérations successives,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_0 + \frac{k(1 - \alpha_n)}{\alpha_n^2}, \quad (F.23)$$

$$\alpha_1 = 0,5, \quad (F.24)$$

et on obtient après quelques itérations $\alpha \approx 0,258$.

7.7 Débit de liquide pompé

Dans l'approximation du modèle homogène, les vitesses moyennes de chaque phases sont égales, et les débits de liquide et de gaz sont donnés par,

$$Q_G = A\alpha w, \quad (F.25)$$

$$Q_L = A(1 - \alpha)w. \quad (F.26)$$

En conséquence le débit de liquide pompé est déterminé par,

$$Q_L = \frac{1 - \alpha}{\alpha} Q_G = 2,88 \quad Q_G = 14,4 \text{ m}^3/\text{h} \quad (F.27)$$

7.8 Régime d'écoulement

Pour estimer le régime d'écoulement, on calcule les vitesses débitantes de liquide et de gaz et on reporte sur une carte d'écoulement de Taitel (1980). Le point représentatif du point de fonctionnement est indiqué par un triangle à la figure F.4. Ses coordonnées sont les suivantes,

$$J_G = \frac{Q_G}{A} = 0,71 \text{ m/s}, \quad (\text{F.28})$$

$$J_L = \frac{Q_L}{A} = 2,03 \text{ m/s}. \quad (\text{F.29})$$

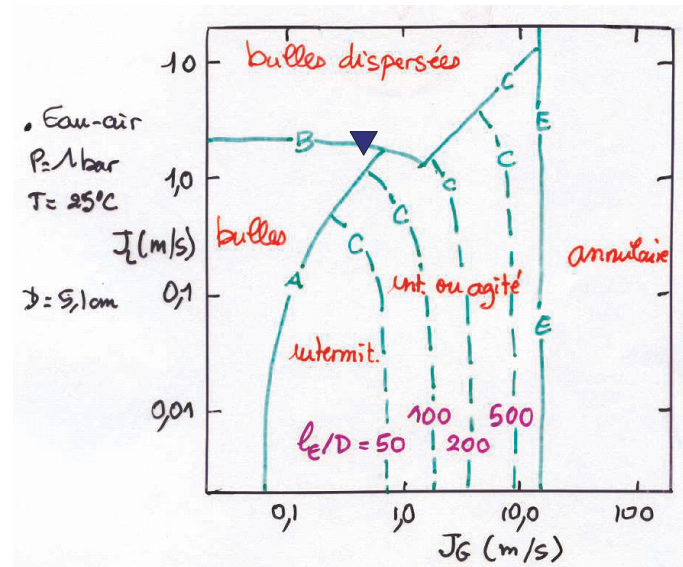


Figure F.4: Représentation du point de fonctionnement de l'air-lift sur la carte de Taitel (1980).

La configuration d'écoulement la plus probable est à bulles ou à bulles dispersées. Ce dernier régime d'écoulement est caractérisé par un mélange intense des phases ce qui justifie l'hypothèse d'écoulement homogène.

Devoir surveillé d'écoulements diphasiques du 13 février 2002

Modalités

Le devoir comporte, d'une part, des questions de cours et, d'autre part, un problème dont les questions sont en grande partie indépendantes. Tous les documents sont autorisés. Tous les moyens de calcul numérique sont autorisés. On demande des réponses justifiées et *concises* qui peuvent éventuellement être documentées par un croquis dont la légende sera bien explicitée. Vous disposez de trois heures pour effectuer le contrôle.

1 Régimes d'écoulement

Qu'est-ce qu'un régime d'écoulement diphasique ? Quelle est son utilité ? Quels sont les régimes d'écoulements diphasiques en conduite horizontale ? Comment détermine-t-on les transitions entre ces régimes ? On ne demande pas de détailler les différentes équations décrivant les transitions.

2 Ebullition en convection forcée

Décrire succinctement les régimes de transferts de chaleur en convection forcée et les mécanismes associés. On ne demande pas de détailler les méthodes de calcul des coefficients de transfert de chaleur correspondant aux différents régimes.

3 Taux de vide

Donner la définition de la fonction indicatrice de phase (FIP). Donner la définition du taux de présence local et sa relation avec la FIP. Donner la définition de la fraction volumique instantanée et donner sa relation avec la FIP.

4 Bilan de quantité de mouvement

Enoncer la règle de Leibniz. Quel est son usage ? Mêmes questions pour le théorème de Gauss. Etablir le bilan de quantité de mouvement phasique et à l'interface à partir du bilan de quantité de mouvement local écrit pour un volume fixe comportant une interface mobile, en appliquant la règle de Leibniz et le théorème de Gauss. On ne prendra pas en compte les effets de tension superficielle.

5 Etude du drainage de la mousse

La mousse est un milieu diphasique en écoulement. Certains procédés industriels peuvent faire apparaître des mousses qui, la plupart du temps, sont indésirables et dont on cherche à se débarrasser. D'autres procédés, en revanche, utilisent la mousse de façon positive. On peut citer par exemple, l'extinction des incendies ou le nettoyage des équipements industriels.

L'avantage du nettoyage à l'aide de mousse est la réduction du volume des effluents à retraiter : en effet, remplir une enceinte de mousse plutôt que d'une solution décapante réduit d'un facteur 15 à 20 le volume de liquide mis en oeuvre et réduit dans les mêmes proportions le coût du retraitement des effluents.

Pour mettre au point les procédés industriels mettant en oeuvre de la mousse, il faut pouvoir disposer d'un modèle d'écoulement diphasique dont on peut ajuster les lois de fermeture à partir d'expériences simples. On propose ici d'étudier le drainage d'une mousse, c'est-à-dire son

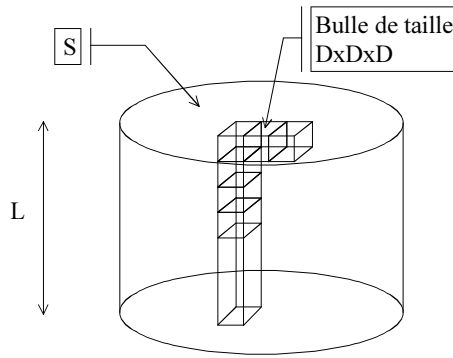


Figure F.1: Structure simplifiée d'une mousse

assèchement progressif sous l'action de la gravité. L'objet du problème est d'élaborer un modèle de *drift-flux* à partir de l'analyse d'expériences.

5.1 Modélisation de la mousse comme un milieu poreux

L'objet des questions qui suivent est d'établir la relation locale liant le débit de liquide traversant une mousse et le taux de liquide qu'elle contient. L'établissement de cette relation est indépendant de la suite du problème.

5.1.1 Relation entre le taux de liquide avec la taille des canaux et de leurs jonctions

On peut obtenir une expression simple pour le taux de liquide à l'aide d'un modèle géométrique de la structure de la mousse. Considérons un volume élémentaire cylindrique de section droite S et de hauteur L comme celui décrit à la figure F.1. Chaque bulle de la mousse est entourée de canaux horizontaux et verticaux de hauteur D , le diamètre des bulles, et de jonctions constituant les intersections des canaux. L'ensemble de ces éléments forment un réseau cubique. On considère que les canaux possèdent une section circulaire de rayon r , que les jonctions sont sphériques et que leur rayon est également r .

Calculer n_1 , l'ordre de grandeur du nombre de canaux contenus dans le volume de mousse de la figure F.1 en fonction de S , L et D .

Calculer n_2 , l'ordre de grandeur du nombre de jonctions contenues dans le volume de mousse de la figure F.1 en fonction de S , L et D .

En considérant que le liquide se trouve uniquement dans les canaux et les jonctions calculer le volume de liquide, V_L , contenu dans le volume cylindrique de la figure F.1 en fonction de n_1 , n_2 , r , et D . On négligera l'épaisseur des jonctions devant la longueur des canaux.

Rappeler la définition du taux de liquide volumique moyen (R_{L3}) contenu dans le volume cylindrique de la figure F.1. En appelant ϵ_L ce taux de liquide en déduire qu'il s'exprime par un polynôme du troisième degré en r/D .

5.1.2 Modélisation de l'écoulement du liquide dans les canaux

L'écoulement dans chaque canal vertical, supposé de section constante s , est supposé laminaire établi et unidirectionnel. On appellera z la coordonnée verticale et on l'orientera vers le bas. Ecrire le bilan de quantité de mouvement pour le liquide moyenné dans la section en supposant

qu'il n'y a pas de changement de phase. On appellera v_L la vitesse moyenne dans la section du canal et ρ_l la masse volumique du liquide.

Trouver l'ordre de grandeur du cisaillement à la paroi des canaux que l'on considérera comme rigides. On appellera τ cette valeur et μ_L la viscosité dynamique du liquide.

Ecrire le bilan de quantité de mouvement à l'interface gaz-liquide que constitue la paroi du canal en le projetant sur la normale à cette interface. On négligera les effets de la tension superficielle (ce qui n'est pas toujours justifié pour une mousse).

En supposant que la pression dans les bulles est uniforme dans le volume considéré, en déduire que le gradient de pression dans le liquide est nul.

En supposant que la contrainte de cisaillement sur la paroi du canal est proportionnelle à l'échelle calculée précédemment, τ , en déduire que la vitesse moyenne du liquide est proportionnelle au carré du rayon des canaux.

5.1.3 Etablissement de la relation entre le débit de liquide et le taux de liquide

En simplifiant la relation de structure calculée précédemment sous la forme $\epsilon_L = a(r/D)^m$ où m est compris entre 2 et 3, en déduire l'expression qui lie la vitesse moyenne dans les canaux, v_L , et le taux de liquide ϵ_L .

5.2 Modèle de dérive (*drift-flux*)

Pour examiner le comportement local de la mousse, on se place dans le cadre des équations phasiques locales moyennées sur un intervalle de temps T court devant les échelles de temps des transitoires étudiés. Pour étudier le comportement d'une colonne contenant de la mousse on accepte l'hypothèse d'écoulement monodimensionnel et on se place dans le cadre des équations aux moyennes composites en temps puis en espace (moyenne dans la section). On confondra donc dans ce qui suit les valeurs locales et les valeurs moyennes dans la section.

L'objet de ce paragraphe est de rappeler les relations nécessaires à l'établissement des équations régissant l'évolution de la mousse. L'analyse des paragraphes précédents suggère une expression simple liant la vitesse du liquide et le taux de liquide. Cette relation a été établie en se plaçant implicitement dans un repère où les bulles constituant la mousse sont fixes. On admet facilement que si la mousse se déplace, la description précédente s'étend au mouvement *relatif* du liquide par rapport aux bulles c'est-à-dire le gaz. En conséquence, on admet que ce mouvement relatif vérifie la relation,

$$\overline{v_L^X} - \overline{v_G^X} = v_L - v_G = v_\infty \epsilon_L^n, \quad 0 < n \leq 1. \quad (\text{F.1})$$

Rappeler l'expression du flux volumique de chaque phase, j_k . L'exprimer uniquement en fonction du taux de présence local du liquide ϵ_L et de la vitesse moyenne de chaque phase, v_k . En raison de l'approximation monodimensionnelle, les flux volumiques sont égaux aux vitesses superficielles respectives. Donner la relation entre vitesse superficielle et le débit volumique moyen de chaque phase. On appellera A la section de la conduite.

Rappeler la définition de la vitesse superficielle du mélange, j . Rappeler l'expression de la vitesse de dérive de chaque phase, v_{Lj} et v_{Gj} . Rappeler l'expression du flux de dérive pour chaque phase j_{LG} , j_{GL} . Montrer que $j_{LG} + j_{GL} = 0$. Exprimer le flux de dérive j_{LG} en fonction

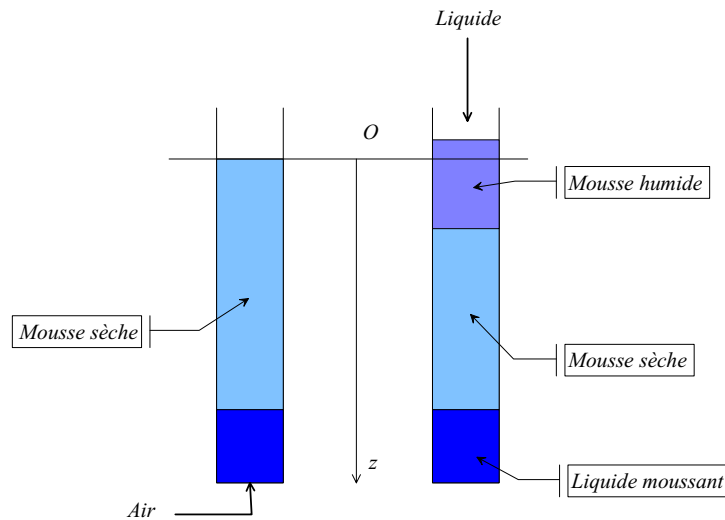


Figure F.2: Description schématique d'une expérience de drainage forcé. À gauche, l'état initial, à droite l'état de la colonne pendant l'expérience de remouillage de la mousse.

du taux de liquide et des vitesses moyennes de chaque phase. Montrer alors en utilisant la relation (F.1) que ce flux de dérive ne dépend que du taux de liquide,

$$j_{LG} = \delta(\epsilon_L), \quad (\text{F.2})$$

où on explicitera la fonction δ en considérant que de plus $\epsilon_L \ll 1$. Montrer que la vitesse superficielle de chaque phase s'exprime symétriquement en fonction du taux de liquide, de la vitesse superficielle du mélange et du flux de dérive.

5.3 Étude du drainage forcé

Une expérience de drainage forcé est schématiquement décrite à la figure F.2. Dans un premier temps, on forme une colonne de mousse dans une conduite verticale en injectant de l'air dans une solution moussante. On laisse drainer librement le liquide et on obtient un mousse sèche surnageant la solution moussante. Le tube est fermé en sa partie inférieure pendant toute la durée de l'expérience. On peut considérer en première approximation qu'au début de l'expérience le taux présence de liquide dans la mousse sèche, ϵ_L , est très faible et quasi nul.

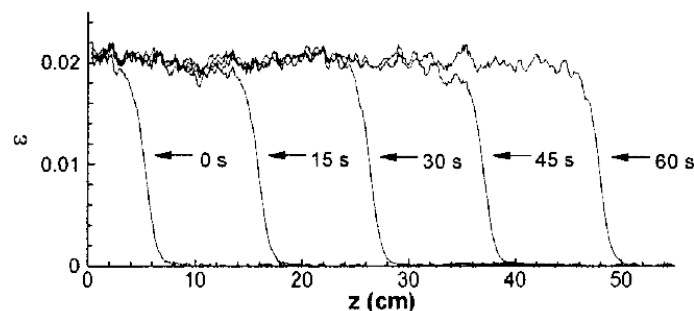


Figure F.3: Evolutions du profil de taux de présence de liquide moyen dans la section en fonction de l'altitude dans la colonne et à différents instants durant une expérience de drainage forcé.

On définit un repère vertical d'axe $0z$ orienté vers le bas. L'origine du repère est fixée à la position initiale de l'interface supérieure entre la mousse et l'air. L'expérience de drainage forcé consiste à remouiller la mousse par le dessus (Figure F.2, à droite) en imposant un débit de

volumique de liquide Q_L donné. Par une méthode de fluorescence, on peut déterminer à tout instant le taux de liquide présent dans la mousse et on obtient à différents instants des profils de taux de présence de liquide analogues à ceux de la figure F.3.

La figure F.3 suggère qu'une onde de taux de liquide se propage du haut vers la bas de la colonne durant l'expérience de drainage forcé. Cette onde semble se propager à une vitesse constante et sépare la colonne en deux zones où on considérera que le taux de liquide et les vitesses de chaque phase sont uniformes et constantes. Dans tout ce qui suit, on considérera les écoulements incompressibles. L'objet de ce paragraphe est de déterminer relation entre la vitesse de l'onde de taux de liquide et le débit de remouillage.

Enoncer le bilan de masse local moyenné dans le temps pour chaque phase. Le simplifier en considérant que les phases sont incompressibles et qu'il n'y a pas de changement de phase.

Ecrire le bilan de masse pour chaque phase dans un volume de contrôle constitué par l'intersection de la colonne par deux plans fixes $z_1 < z_2$ contenant la discontinuité dont on appellera la position $z_f(t)$. En déduire la relation entre la vitesse du front $v_f = dz_f/dt$, le taux de présence moyen de phase et les vitesses superficielles de chaque phase de chaque côté du front. On désignera par A l'aire de la section droite de la colonne.

En appliquant ces relations au remouillage de la mousse initialement sèche, montrer que la vitesse superficielle du mélange est nulle de chaque côté du front. Montrer alors que la vitesse du front peut s'exprimer en fonction du taux de liquide seulement.

Dans une expérience de remouillage on contrôle le débit de liquide et on peut mesurer le profil de taux de liquide à différents instants (figure F.3). Imaginer un plan d'expériences permettant de déterminer expérimentalement les caractéristiques de la mousse v_∞ et n .

5.4 Etude du drainage libre

Une expérience de drainage libre suit généralement une expérience de drainage forcé. Lors du drainage forcé, on laisse le front atteindre l'interface liquide mousse situé en bas de la colonne. Le taux de liquide de la mousse est alors uniforme sur toute la colonne. Soit ϵ_{L0} la valeur du taux de liquide ainsi atteint. A $t = 0$, on arrête le remouillage et on laisse drainer librement la mousse (figure F.4). Le haut de la colonne s'appauvrit en liquide et les profils de taux de liquide aux différents instants suivant l'arrêt du remouillage sont analogues à ceux de la figure F.5

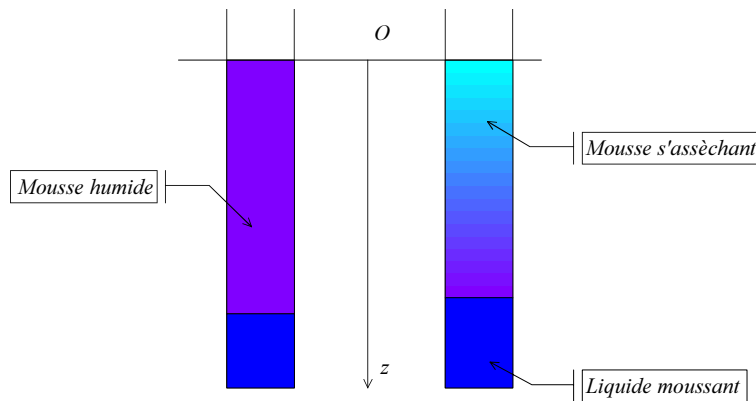


Figure F.4: Description schématique d'une expérience de drainage libre. A gauche, l'état initial, à droite l'état de la colonne pendant l'expérience de drainage libre.

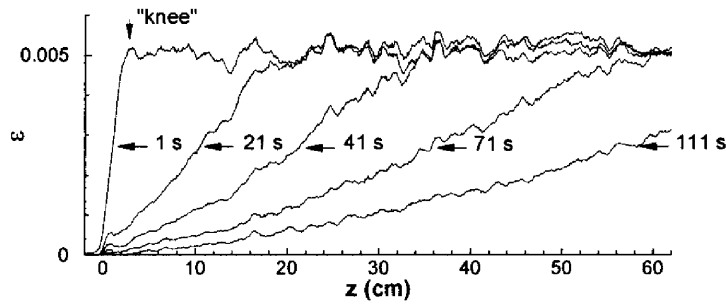


Figure F.5: Evolutions du profil de taux de présence de liquide moyen dans la section en fonction de l'altitude dans la colonne et à différents instants durant une expérience de drainage libre.

Donner l'expression générale des bilans de masse de chaque phase moyennés en temps puis sur la section supposée uniforme de la conduite. On appellera A la section de la conduite, v la vitesse et ρ la masse volumique.

On considère qu'il n'y a pas de changement de phase, et que les deux phases sont incompressibles. Simplifier les équations précédentes en ne faisant apparaître seulement que le taux de présence du liquide que l'on note ϵ_L .

Montrer, en justifiant soigneusement votre réponse, que les deux bilans de masse peuvent se mettre sous une forme ne faisant intervenir que la vitesse superficielle de chaque phase et le taux de liquide.

En utilisant les expressions des vitesses superficielles établies précédemment montrer que les deux bilans de masse peuvent être combinées pour donner le système suivant où on explicitera la fonction W ,

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon_L}{\partial t} + W(\epsilon_L) \frac{\partial \epsilon_L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial j}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

5.5 Conditions initiales et aux limites

Pour intégrer l'équation de propagation du taux de liquide (F.3), il faut se donner des conditions initiales et aux limites. A l'aide des résultats de la question précédente montrer que j est uniformément nul pendant toute l'expérience de drainage libre. Montrer que l'interface mousse air reste immobile pendant l'expérience et déterminer la condition aux limites en $z = 0$. Donner également la condition initiale pour le taux de liquide.

5.6 Intégration de l'équation de propagation par la méthode des caractéristiques

L'équation de propagation non linéaire (F.3) s'intègre par la méthode des caractéristiques. Le taux de liquide est une fonction de z et de t , $\epsilon_L(z, t)$. Calculer la dérivée du taux de liquide le long d'une courbe du plan (z, t) dont la pente, dz/dt , est c . Montrer que si l'on choisit judicieusement c , l'équation de propagation du taux de liquide devient,

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon_L}{dt} = 0 \text{ sur la courbe,} \\ \frac{dz}{dt} = W(\epsilon_L) \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

On appelle les courbes, $dz/dt = W$, les caractéristiques du système. Montrer que les courbes caractéristiques sont des droites dans le plan (z, t) et que sur ces droites, le taux de liquide est

constant. Dans le plan (z, t) les caractéristiques s'appuient soit sur l'axe $t = 0$ correspondant à la condition initiale soit sur l'origine où l'on acceptera que toutes les valeurs du taux de vide comprises en 0 et ϵ_{L0} sont représentées.

On veut tester la théorie sur l'expérience décrite à la figure F.5 où $\epsilon_{L0} = 0,005$ et le comportement de la mousse déduit des essais de drainage forcé est,

$$v_{\infty} = 7,94 \text{ cm/s}, \quad n = 0,6. \quad (\text{F.5})$$

Représenter dans le plan (z, t) les courbes caractéristiques. Montrer que le plan est divisé en deux zones où les caractéristiques ont des comportements différents. Déterminer les profils de taux de liquide pour les instants $t = 1, 21, 41, 71, 111$ s. Que peut-on dire des prédictions du modèle ?

5.7 Plan d'expériences

Imaginer un plan d'expériences permettant de déterminer, par des expériences de drainage libre, les caractéristiques de la mousse (v_{∞} et n). Combien d'expériences faut-il mener pour déterminer ces paramètres ?

Corrigé du problème du devoir surveillé d'écoulements diphasiques du 13 février 2002

5.1 Modélisation de la mousse comme un milieu poreux

5.1.1 Relation entre le taux de liquide avec la taille des canaux et de leurs jonctions

L'ordre de grandeur du nombre de cubes contenus dans le volume cylindrique est égal au rapport du volume cylindrique représenté à la figure et du volume du chaque cube.

$$n_{cubes} = \frac{SL}{D^3} \quad (F.1)$$

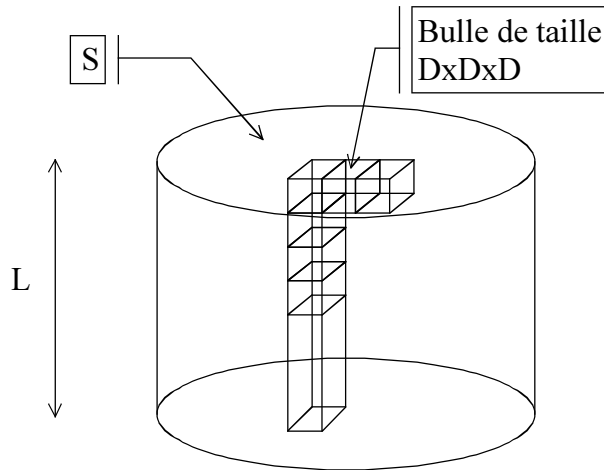


Figure F.1: Structure simplifiée d'une mousse

Il y a 12 arêtes par cube et elles appartiennent aux 4 cubes adjacents. Le nombre de canaux contenus dans le volume considéré est donc,

$$n_1 = n_{cubes} \times 12 \times \frac{1}{4} = 3 \frac{SL}{D^3}. \quad (F.2)$$

Il y a 8 sommets par cube et ils appartiennent aux 8 cubes adjacents. Le nombre de jonctions contenues dans le volume considéré est donc,

$$n_2 = n_{cubes} \times 8 \times \frac{1}{8} = \frac{SL}{D^3}. \quad (F.3)$$

Le liquide est contenu dans les canaux et les jonctions. Le volume de liquide est donc égal à,

$$V_L = n_1 \pi r^2 D + n_2 \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (F.4)$$

Le taux de liquide moyen R_{L3} est égal rapport du volume de liquide V_L au volume considéré.

$$R_{L3} \triangleq \frac{V_L}{V} = \frac{V_L}{SL} = \epsilon_L. \quad (F.5)$$

On en déduit que le taux de liquide est lié aux paramètres de structure de la mousse par,

$$\epsilon_L = 3\pi \left(\frac{r}{D}\right)^2 + \frac{4}{3}\pi \left(\frac{r}{D}\right)^3. \quad (F.6)$$

5.1.2 Modélisation de l'écoulement du liquide dans les canaux

L'écoulement étant établi, les termes d'accélération sont nuls. Les forces de volume appliquées sont limitées à la gravité g . Les contraintes appliquées sont celles de cisaillement en paroi τ_W et on rappelle qu'il n'y a pas de changement de phase. Si on appelle p la pression moyenne dans la section, le bilan de quantité de mouvement projeté sur l'axe du canal se réduit à,

$$0 = -s \frac{dp}{dz} - \mathcal{P} \tau_W + s \rho_L g. \quad (\text{F.7})$$

La contrainte de cisaillement à la paroi du canal s'exprime par,

$$\tau_W = \mu_L \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{F.8})$$

où u est la composante verticale de la vitesse et y la coordonnée dans la direction normale à la paroi. En régime laminaire son ordre de grandeur est donc,

$$\tau = \mu_L \frac{v_L}{r}. \quad (\text{F.9})$$

On en déduit que,

$$\tau_W = k \tau, \quad (\text{F.10})$$

où k est une constante qui, dans le cas général, dépend de la géométrie détaillée du canal. En négligeant les effets de tension superficielle et en considérant que le caractère établi et unidirectionnel du champ de vitesse annule la composante normale des contraintes visqueuses, le bilan de quantité de mouvement de l'interface se réduit à,

$$p_L = p_G. \quad (\text{F.11})$$

En conséquence, la pression dans le liquide étant uniforme dans la section et la pression dans le gaz l'étant également dans tout le volume de mousse on a,

$$\frac{dp}{dz} = \frac{dp_L}{dz} = \frac{dp_G}{dz} = 0. \quad (\text{F.12})$$

En fonction de ces considérations, le bilan de quantité de mouvement (F.7) se simplifie en,

$$\mathcal{P} k \tau = s \rho_L g = \mathcal{P} k \mu_L \frac{v_L}{r} = \pi r^2 \rho_L g. \quad (\text{F.13})$$

Pour un canal circulaire cette relation se simplifie en,

$$v_L = \frac{r}{k \mu_L} \frac{\pi r^2}{2 \pi r} \rho_L g = \frac{1}{2k} \frac{\rho_L g}{\mu_L} r^2, \quad (\text{F.14})$$

ce qu'il fallait démontrer.

5.1.3 Etablissement de la relation entre le débit de liquide et le taux de liquide

En acceptant que la relation approchée donnée dans le texte décrit le comportement théorique de la mousse (F.6), on résout cette dernière équation par rapport à r . On obtient alors,

$$\epsilon_L = a \left(\frac{r}{D} \right)^m \implies r = D \left(\frac{\epsilon_L}{a} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (\text{F.15})$$

En reportant cette expression dans celle de la vitesse calculée précédemment (F.14), on obtient,

$$v_L = \frac{1}{2k} \frac{\rho_L g}{\mu_L} r^2 = \frac{1}{2k} a^{-\frac{2}{m}} \frac{\rho_L g D^2}{\mu_L} \epsilon_L^{\frac{2}{m}} = v_0 \epsilon_L^{\frac{2}{m}}, \quad (\text{F.16})$$

où v_0 a bien la dimension d'une vitesse.

5.2 Modèle de dérive (*drift-flux*)

Lors de la description du modèle de Wallis, on a introduit le flux volumique de chaque phase. En tenant compte de l'hypothèse 1D on a les relations suivantes. Les notations des différentes moyennes sont celles du cours. Pour le liquide on a,

$$j_L \triangleq \epsilon_L \overline{v_L^X} = \epsilon_L v_L, \quad \langle j_L \rangle_2 = \frac{\overline{Q_L}}{A} = j_L. \quad (\text{F.17})$$

Pour le gaz on aura de la même façon,

$$j_G \triangleq \epsilon_G \overline{v_G^X} = (1 - \epsilon_L) v_G, \quad \langle j_G \rangle_2 = \frac{\overline{Q_G}}{A} = j_G. \quad (\text{F.18})$$

La vitesse superficielle du mélange est égale à la somme des vitesses superficielles de chaque phase.

$$j \triangleq j_L + j_G. \quad (\text{F.19})$$

Le modèle de Wallis introduit la vitesse de dérive comme la vitesse moyenne de chaque phase relative à la vitesse superficielle du mélange.

$$v_{Lj} \triangleq v_L - j, \quad (\text{F.20})$$

$$v_{Gj} \triangleq v_G - j. \quad (\text{F.21})$$

Le flux de dérive est le flux volumique de chaque phase relativement à la vitesse superficielle du mélange. On a,

$$j_{LG} \triangleq \epsilon_L (v_L - j), \quad (\text{F.22})$$

$$j_{GL} \triangleq (1 - \epsilon_L) (v_G - j). \quad (\text{F.23})$$

En utilisant la définition de la vitesse superficielle du mélange (F.19) et en additionnant les deux définitions précédentes (F.22) et (F.23), on a,

$$j = j_L + j_G = \epsilon_L v_L + (1 - \epsilon_L) v_G, \quad (\text{F.24})$$

alors,

$$j_{LG} + j_{GL} = \epsilon_L (v_L - j) + (1 - \epsilon_L) (v_G - j) = \epsilon_L v_L + (1 - \epsilon_L) v_G - j = 0, \quad (\text{F.25})$$

ce qu'il fallait démontrer. La définition du flux de dérive du liquide (F.22) et la relation entre la vitesse superficielle du mélange et les vitesses moyennes des phases donnent,

$$\begin{aligned} j_{LG} &= \epsilon_L (v_L - j) = \epsilon_L v_L - \epsilon_L j = \epsilon_L v_L - \epsilon_L^2 v_L - \epsilon_L (1 - \epsilon_L) v_G = \\ &= \epsilon_L (1 - \epsilon_L) v_L - \epsilon_L (1 - \epsilon_L) v_G = \epsilon_L (1 - \epsilon_L) (v_L - v_G). \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

En utilisant la relation de fermeture donnée dans le texte (équation 1 du texte de problème) rappelée ici,

$$v_L - v_G = v_\infty \epsilon_L^n, \quad (\text{F.27})$$

on obtient en remplaçant dans l'expression du flux de dérive (F.26),

$$j_{LG} = \epsilon_L (1 - \epsilon_L) (v_L - v_G) = v_\infty (1 - \epsilon_L) \epsilon_L^{n+1} \approx v_\infty \epsilon_L^{n+1} = \delta(\epsilon_L), \quad (\text{F.28})$$

compte tenu de la petitesse de ϵ_L devant 1. Finalement en considérant la définition du flux de dérive et celle de la vitesse superficielle de chaque phase on obtient,

$$j_{LG} = \epsilon_L (v_L - j) = \epsilon_L v_L - \epsilon_L j = j_L - \epsilon_L j \implies j_L = \epsilon_L j + j_{LG}. \quad (\text{F.29})$$

De même pour le gaz,

$$j_{GL} = \epsilon_G (v_G - j) = j_G - \epsilon_G j \implies j_G = \epsilon_G j + j_{GL} = (1 - \epsilon_L) j - j_{LG}. \quad (\text{F.30})$$

5.3 Etude du drainage forcé

Le bilan de masse *local* pour chaque phase moyenné dans le temps s'énonce avec les notations du cours,

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_k \overline{\rho_k}^X + \nabla \cdot \epsilon_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k}^X = -\frac{1}{T} \sum_{\text{disc} \in [T]} \frac{\dot{m}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}. \quad (\text{F.31})$$

En considérant l'incompressibilité des phases et l'absence de changement de phase ($\dot{m}_k = 0$), on obtient,

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_k + \nabla \cdot \epsilon_k \overline{\mathbf{v}_k}^X = 0. \quad (\text{F.32})$$

En intégrant cette équation sur le volume de contrôle fixe contenant la discontinuité décrit dans le texte du problème, on obtient,

$$\int_{V(z_1, z_2)} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial t} dV + \int_{V(z_1, z_2)} \nabla \cdot \epsilon_k \mathbf{v}_k dV = 0. \quad (\text{F.33})$$

On applique la règle de Leibniz à la première intégrale, en considérant que le volume est fixe, il n'y a pas de terme de flux. En appliquant le théorème de Gauss à la seconde, on obtient,

$$\frac{d}{dt} \int_V \epsilon_k dV + \int_{\delta V} \epsilon_k \overline{\mathbf{v}_k}^X \cdot \mathbf{n}_k dS = A \frac{d}{dt} [(z_f - z_1) \epsilon_{k1} + (z_2 - z_f) \epsilon_{k2}] + A(\epsilon_{k2} \overline{v_{k2}}^X - \epsilon_{k1} \overline{v_{k1}}^X) = 0, \quad (\text{F.34})$$

où l'on a considéré que les états gauche et droit de la discontinuité sont uniformes. En raison du bilan de masse (F.33) on obtient,

$$(\epsilon_{k1} - \epsilon_{k2}) \frac{dz_f}{dt} = -(\epsilon_{k2} \overline{v_{k2}}^X - \epsilon_{k1} \overline{v_{k1}}^X) = j_{k1} - j_{k2}, \quad (\text{F.35})$$

d'où l'on obtient la vitesse du front V_f ,

$$V_f = \frac{dz_f}{dt} = \frac{j_{k1} - j_{k2}}{\epsilon_{k1} - \epsilon_{k2}} \quad (\text{F.36})$$

Lors de l'expérience de remouillage, la mousse est sèche et au repos à l'avant de front (coté 2). On a donc pour chaque phase,

$$V_f = \frac{j_{L1}}{\epsilon_{L1}} = \frac{j_{G1}}{(1 - \epsilon_{L1}) - 1} = -\frac{j_{G1}}{\epsilon_{L1}}, \quad (\text{F.37})$$

d'où on déduit immédiatement que,

$$j_1 = j_{L1} + j_{G1} = 0. \quad (\text{F.38})$$

A l'avant du front, les deux phases sont au repos, on a donc bien j constant et *nul* de chaque côté du front.

La vitesse de dérive et le taux de liquide étant liés par la relation de dérive (F.26) et compte tenu de la nullité de j , en utilisant l'expression de la vitesse superficielle du liquide (F.29), on montre,

$$j_{L1} = \epsilon_{L1} j_1 + j_{LG} = j_{LG}(\epsilon_{L1}) = v_\infty \epsilon_{L1}^{n+1} \implies V_f = \frac{j_{L1}}{\epsilon_{L1}} = v_\infty \epsilon_{L1}^n \quad (\text{F.39})$$

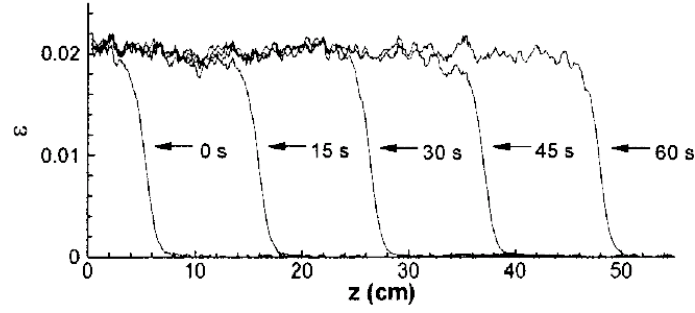


Figure F.2: Evolutions du profil de taux de présence de liquide moyen dans la section en fonction de l'altitude dans la colonne et à différents instants durant une expérience de drainage forcé d'après Koehler *et al.* (2000).

La vitesse du front ne dépend que du taux de liquide.

Le plan d'expérience à mettre en oeuvre est basé sur la relation (F.39). En effectuant plusieurs expériences de drainage forcé avec des débits de remouillage différents, on peut déterminer simplement v_∞ et n . Pour chaque expérience de remouillage, on note le taux de liquide à l'arrière du front et on détermine la vitesse moyenne du front. Généralement on définit la position du front comme le lieu sur le profil correspondant à la demi discontinuité. Le déplacement du front est calculé à partir de deux profils (figure F.2) pour lesquels on connaît la valeur du temps. La vitesse du front s'en déduit. On trace alors en échelles Log-Log la vitesse du front en fonction du taux de liquide. Si la théorie est correcte, on doit obtenir une droite dont on détermine la pente et l'ordonnée à l'origine par régression linéaire, ce qui détermine directement v_∞ et n . C'est la procédure utilisée par Koehler *et al.* (2000). Un résultat typique est montré à la figure F.3.

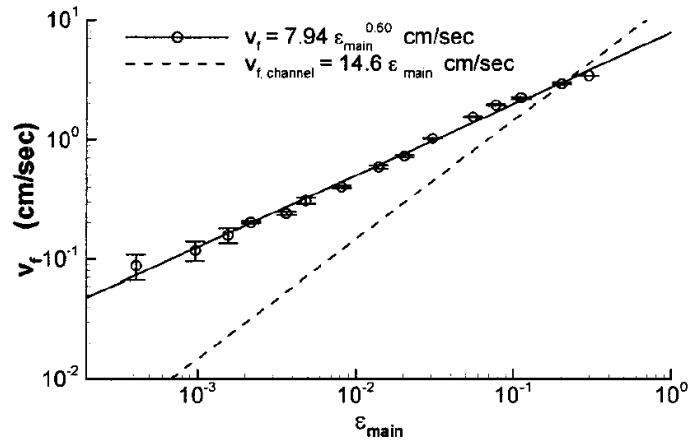


Figure F.3: Vitesse du front en fonction du taux de liquide à l'arrière du front, pour différentes expériences de remouillage et pour une mousse sèche d'après Koehler *et al.* (2000). ϵ_{main} doit ici être identifié avec ϵ_{L1} .

5.4 Etude du drainage libre

Les bilans de masse moyennés en temps puis sur la section de la conduite s'écrivent pour chaque phase,

$$\frac{\partial}{\partial t} A \langle \epsilon_k \overline{\rho_k}^X \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A \langle \epsilon_k \overline{\rho_k} v_k^X \rangle_2 = -\frac{A}{T} \langle \sum_{disc \in [T]} \frac{\dot{m}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \rangle_2, \quad (\text{F.40})$$

où l'indice k vaut L pour le liquide et G pour le gaz, v_k est la composante de la vitesse selon l'axe Oz . Le flux de masse à l'interface est défini par,

$$\dot{m}_k = \rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_k, \quad (\text{F.41})$$

où \mathbf{v}_i est la vitesse géométrique de l'interface et \mathbf{n}_k est la normale à l'interface dirigée vers l'extérieur de la phase k .

Si les phases sont considérées comme incompressibles, leur masse volumique est constante et uniforme dans la conduite. Si, de plus, il n'y a pas de changement de phase, alors il n'y a pas de flux de masse à l'interface donc \dot{m}_k est nul en tout point de l'interface. Si par ailleurs la section de la conduite est constante et l'écoulement monodimensionnel (profils plats pour toutes les grandeurs), on obtient les deux bilans de masse suivants,

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_L \overline{v_L}^X = 0 \\ -\frac{\partial \epsilon_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (1 - \epsilon_L) \overline{v_G}^X = 0 \end{cases} \quad (\text{F.42})$$

En introduisant les vitesses superficielles de chaque phase (F.17) et (F.18) on obtient,

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon_L}{\partial t} + \frac{\partial j_L}{\partial z} = 0 \\ -\frac{\partial \epsilon_L}{\partial t} + \frac{\partial j_G}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{F.43})$$

En additionnant les deux bilans de masse (F.43) on obtient,

$$\frac{\partial j_L}{\partial z} + \frac{\partial j_G}{\partial z} = \frac{\partial j}{\partial z} = 0. \quad (\text{F.44})$$

En substituant les expressions de la vitesse superficielle (F.29) et (F.30) dans les mêmes bilans de masse et en tenant compte de $j_{GL} + j_{LG} = 0$, on obtient deux équations identiques,

$$\frac{\partial \epsilon_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_L j + j_{LG}) = 0. \quad (\text{F.45})$$

En tenant compte de la relation entre le flux de dérive et le taux de liquide (F.28) et du bilan de masse du mélange (F.44) on obtient,

$$\frac{\partial \epsilon_L}{\partial t} + (j + \frac{d\delta}{d\epsilon_L}) \frac{\partial \epsilon_L}{\partial z} = 0. \quad (\text{F.46})$$

C'est l'expression demandée où on identifie,

$$W(\epsilon_L) = j + \frac{d\delta(\epsilon_L)}{d\epsilon_L}. \quad (\text{F.47})$$

5.5 Conditions initiales et aux limites

Le bilan de masse du mélange (F.44) montre, par intégration en z , que j est uniforme. Le bas de la colonne est fermé, en conséquence, j est nul en bas de la colonne et il est donc nul sur toute la colonne, à tous les instants du transitoire. L'écoulement étant incompressible et le débit alimentant la mousse nul, le débit soutiré l'étant aussi, le volume de la mousse et du liquide drainé reste constant. L'interface air mousse reste donc immobile pendant l'expérience. On assiste simplement à une redistribution du liquide entre la mousse et le liquide moussant. L'interface air-mousse reste donc toujours à la coté $z = 0$.

Le taux de liquide est uniforme au temps $t = 0$, moment de l'arrêt du remouillage. A l'origine, le taux de liquide est toujours lié à la vitesse superficielle du liquide par la relation (F.29). j étant toujours nul, $j_l = Q_L/A$ l'étant car le débit de remouillage a été arrêté, j_{LG} l'est aussi. En vertu de la relation de fermeture pour le flux de dérive (F.28), on en déduit que le taux de liquide est nul en $z = 0$. La condition aux limites de l'équation de propagation de taux de liquide est donc,

$$\epsilon_L(0, t) = 0 \quad (\text{F.48})$$

La condition initiale est donc pour la même équation,

$$\epsilon_L(z, 0) = \epsilon_{L0} H(z) \quad (\text{F.49})$$

où H est la fonction de Heaviside. Le problème de propagation est donc fermé.

5.6 Intégration de l'équation de propagation par la méthode des caractéristiques

Le taux de liquide est une fonction de z et t . En conséquence, la dérivée de ϵ_L le long de la courbe d'équation $dz/dt=c$ s'écrit,

$$\frac{d\epsilon_L}{dt} = \frac{d\epsilon_L}{dt}(z(t), t) = \frac{\partial \epsilon_L}{\partial t} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \epsilon_L}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_L}{\partial t} + c \frac{\partial \epsilon_L}{\partial z} \quad (\text{F.50})$$

Par identification avec la relation (F.3), on voit que si l'on choisit $c = W(\epsilon_L)$, on obtient,

$$\frac{d\epsilon_L}{dt} = \frac{\partial \epsilon_L}{\partial t} + W(\epsilon_L) \frac{\partial \epsilon_L}{\partial z} = 0 \quad \text{sur la courbe d'équation} \quad \frac{dz}{dt} = W(\epsilon_L). \quad (\text{F.51})$$

On déduit de (F.51) que le taux de liquide est uniforme sur chaque courbe caractéristique. La pente de la courbe ne dépend que de ϵ_L qui est justement constant sur cette courbe. Les courbes caractéristiques sont donc des droites.

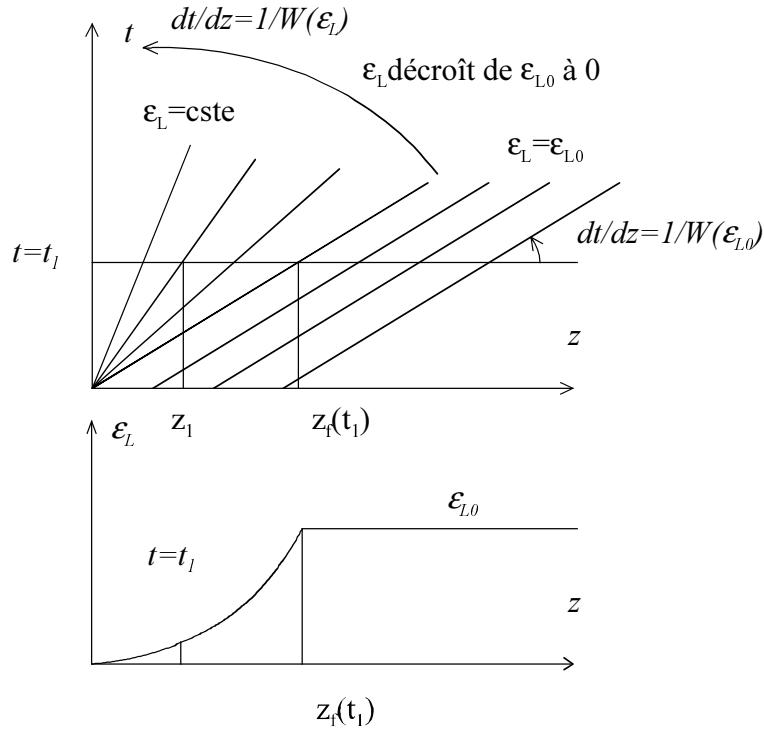


Figure F.4: Diagramme caractéristique et profil de taux de liquide à deux instants différents.

Comme le suggère le texte, les courbes caractéristiques coupent soit l'axe de z , soit se concentrent à l'origine où se situe la discontinuité des conditions initiales. La pente des caractéristiques est constante à droite de l'origine puisque le profil initial est uniforme. Le taux de liquide est donc uniforme sur toutes ces caractéristiques et vaut ϵ_{L0} . La pente commune des caractéristiques dans cette zone (figure F.4) vaut alors,

$$\frac{dz}{dt} = W(\epsilon_{L0}) = (n+1)v_\infty\epsilon_{L0}^n \quad (\text{F.52})$$

Les valeurs de ϵ_{L0} sont donc transportées vers la droite à la vitesse $W(\epsilon_{L0})$. Le profil de taux de liquide à l'instant t_1 présente donc une partie uniforme à droite de la position du front, $z_f(t_1)$ calculée par l'intersection de la caractéristique de pente $W(\epsilon_{L0})$ issue de l'origine et la droite d'équation $t = t_1$. La position de ce front est donc (figure F.4),

$$z_f(t_1) = W(\epsilon_{L0})t_1. \quad (\text{F.53})$$

A gauche du front, en un point d'abscisse z_1 , la valeur de ϵ_L est déterminée par la pente de la caractéristique issue de l'origine et passant par le point (z_1, t_1) . Or, point fondamental, W est une fonction croissante de ϵ_L car $0 < n \leq 1$. Les caractéristiques s'étalent donc en éventail dans toute la zone comprise entre le front et l'origine. Le discontinuité initiale est donc *dispersée* lors de sa propagation vers le bas. On a donc dans cette région, la relation,

$$\frac{z_1}{t_1} = W(\epsilon_L) = (n+1)v_\infty\epsilon_L^n \implies \epsilon_L(z_1, t_1) = \left(\frac{z_1}{(n+1)v_\infty t_1} \right)^{1/n}. \quad (\text{F.54})$$

Le profil de taux de liquide est donc obtenu entièrement analytiquement. Il est décrit par l'expression,

$$\epsilon_L(z, t) = \begin{cases} \left(\frac{z}{(n+1)v_\infty t} \right)^{1/n}, & z < z_f(t) \\ \epsilon_{L0}, & z \geq z_f(t) \end{cases} \quad (\text{F.55})$$

$1/n$ étant positif est supérieur à 1, l'allure du profil est bien celui représenté à la figure F.4. Une application numérique avec les valeurs données dans le texte est proposée à la figure F.5. Il est clair que l'aspect quantitatif est bien reproduit. En particulier la cassure du profil est bien restituée par le modèle comme l'est d'ailleurs la dispersion du front. En revanche, le modèle semble propager la discontinuité moins vite que l'expérience.

5.7 Plan d'expériences

Lors d'un essai de drainage libre, un seul essai, en théorie permet de déterminer n et v_∞ . En effet, si l'on considère la propagation d'un point particulier du profil, à ϵ_L donné, à deux instants différents t_2 et t_1 respectivement (figure F.7), on peut déterminer la vitesse de propagation du point sur le profil simplement par,

$$v_f(\epsilon_L) = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}. \quad (\text{F.56})$$

On sait en théorie, que ce point du profil est toujours associé à la même caractéristique dont la pente est connue et vaut $W(\epsilon_L)$. On obtient donc la fonction W en traçant en échelles Log-Log par exemple, v_f déterminé graphiquement par (F.56) en fonction de ϵ_L , le point choisi du profil. D'une manière analogue à celle utilisée pour l'étude de la propagation des fronts, une régression linéaire donne n et v_∞ . Une expérience de drainage libre est donc beaucoup plus riche qu'une expérience de drainage forcé.

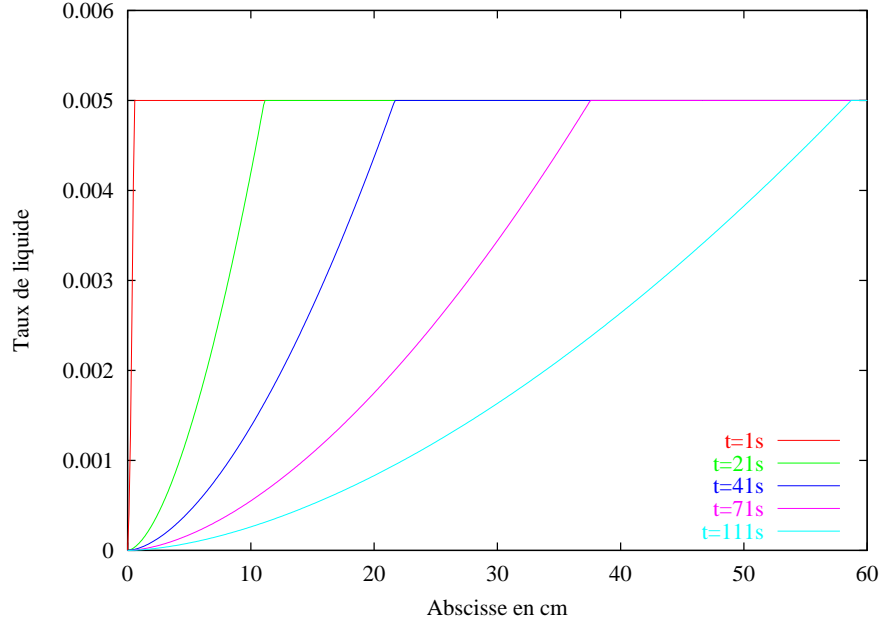


Figure F.5: Evolution du taux de liquide pour un essai de drainage libre. $\epsilon_{L0} = 0,005$, $v_{\infty} = 7,94$ cm/s, $n = 0,6$. Les instants correspondant aux différents profils sont indiqués dans la légende de la figure.

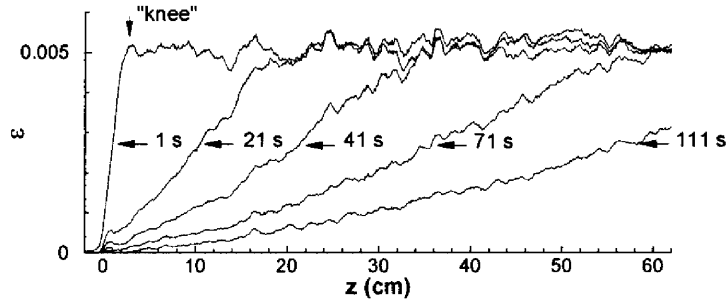


Figure F.6: Evolutions du profil de taux de présence de liquide moyen dans la section en fonction de l'altitude dans la colonne et à différents instants durant une expérience de drainage libre.

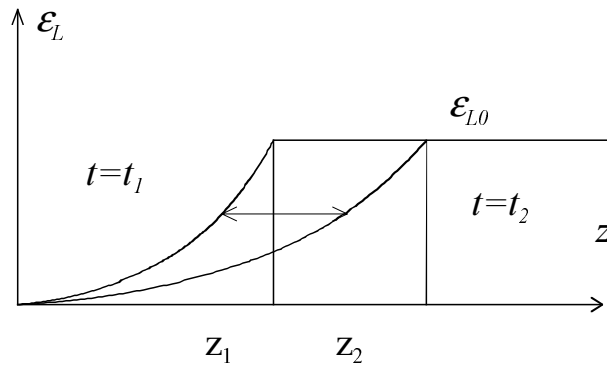


Figure F.7: Profils de taux de liquide pour un essai de drainage libre à deux instants différents.

5.8 Conclusion

On observe que la théorie prévoit, lorsque la vitesse de propagation est une fonction croissante du taux de liquide, qu'une discontinuité d'amplitude positive ($V_f = v_{\infty} \epsilon_L^n$) se propage moins vite que le front d'une discontinuité d'amplitude négative dont le front se propage à la vitesse $v_f = (n + 1)v_{\infty} \epsilon_L^n$. Le rapport d'environ 1,5 est clairement observé sur les données présentées

ici (figures F.3 et F.6) ceci est une caractéristique essentielle des ondes non linéaires. La théorie classique des caractéristiques appliquée à la résolution générale des équations de propagation de type (F.3) est présentée par Whitham (1974, Ch. 1). La théorie du drift flux appliquée aux ondes discontinues est également bien décrite par Wallis (1969) qui suggère d'ailleurs l'application du modèle de dérive au drainage de la mousse. La description des expériences servant de support au problème est détaillée par Koehler *et al.* (2000). On y trouve d'ailleurs une théorie complète prenant en compte les effets capillaires.

Ce problème est inspiré très largement des travaux de thèse de Pouvreau (2002).

Devoir surveillé d'écoulements diphasiques du 26 février 2003

Modalités

Le devoir comporte, d'une part, des questions de cours et, d'autre part, un problème. Tous les documents et moyens de calcul sont autorisés. On demande des réponses justifiées et concises qui peuvent éventuellement être documentées par un croquis dont la légende sera bien explicitée.

1 Taux de vide

Donner la définition du taux de vide local, α_G , donner sa relation avec la fonction indicatrice de la phase gaz, X_G . Donner la définition de la fraction surfacique de gaz instantanée, R_{G2} . Donner sa relation avec la fonction indicatrice de phase X_G . Démontrer l'identité suivante exprimant la commutativité des opérateurs de moyennes,

$$\overline{\alpha_G} = \overline{R_{G2}} \quad (\text{F.1})$$

Décrire une technique de mesure fraction surfacique instantanée de gaz. A quoi peut servir l'identité (F.1) ?

2 Bilan de masse

Enoncer la règle de Leibniz. Quel est son usage ? Enoncer le théorème de Gauss. Quel est son usage ? Enoncer le principe de conservation de la masse. Quel est la forme locale du bilan de masse en écoulement monophasique ? Démontrer la relation de saut relative à la masse à l'interface qui s'énonce,

$$\rho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_1 + \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (\text{F.2})$$

ou ρ_k , $k = 1, 2$, est la masse volumique de chaque phase présente de part et d'autre de l'interface, \mathbf{v}_k , $k = 1, 2$, est la vitesse de chaque phase de part et d'autre de l'interface, \mathbf{n}_k , $k = 1, 2$, est la normale à l'interface dirigée vers l'extérieur de la phase k et $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k$ est la vitesse géométrique de déplacement de l'interface.

3 Ebullition en vase

Décrire succinctement l'expérience d'ébullition en vase de Nukiyama. Décrire et commenter la courbe d'ébullition. Détailler ce que l'on mesure et les différents régimes d'ébullition (il est inutile de donner les corrélations de transfert de chaleur).

4 Condensation

Quels sont les deux régimes principaux de condensation ? Les décrire succinctement (il est inutile de donner les corrélations de transfert de chaleur). Quel est le régime de transfert de chaleur le plus efficace ?

5 Dégazage du lac de Nyos

Le lac de Nyos, situé au Cameroun, est alimenté en gaz carbonique par des sources profondes d'origine volcanique. En 1986, à la suite d'un glissement de terrain résultant de pluies violentes, les eaux profondes saturées en gaz carbonique sont remontées à la surface et ont libéré des millions de mètres cube de CO_2 provoquant la mort par asphyxie de plus de 1700 personnes résidant aux alentours du lac.

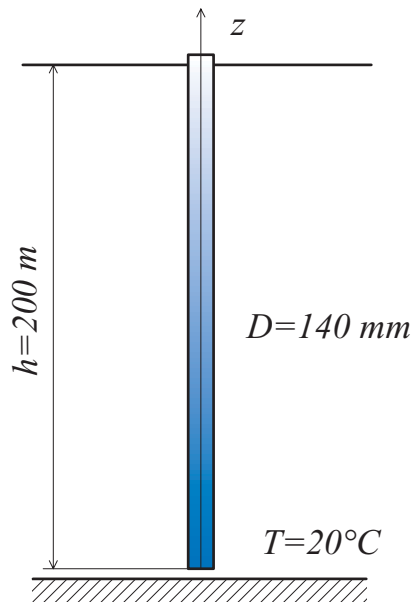


Figure F.1: Représentation schématique du tube permettant le dégazage des eaux profondes du lac de Nyos. Les vannes et autres dispositifs d'arrêt et d'amorçage ne sont pas représentés.

De façon à éviter la reproduction d'une telle catastrophe, un dispositif rustique et passif de dégazage a été mis au point qui permet en permanence de faire remonter dans une conduite les eaux profondes. Ce dispositif ne comporte pas de pompe. Lors de la détente du liquide consécutive à son écoulement, le gaz carbonique est libéré ce qui évite son accumulation dans les profondeurs du lac.

Le dispositif est schématiquement représenté à la figure F.1. Il est constitué d'une conduite circulaire de diamètre uniforme D et de longueur h . Les données relatives au mélange d'eau et de gaz carbonique en solution seront approchées par celle de l'eau à 20°C . On considère l'écoulement comme isotherme. La température est donc uniforme et vaut 20°C . On négligera les variations de masse volumique du liquide induites par les variations de concentration en gaz carbonique. On donne,

- Masse volumique de l'eau, $\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Viscosité dynamique de l'eau; $\mu_L = 1,0 \text{ mPa s}$:
- Fraction massique en CO_2 dissous des eaux profondes, $y_0 = 11 \cdot 10^{-3}$ ce qui correspond à la pression atmosphérique à 5,6 l de CO_2 par l de solution.
- Hauteur de l'installation, $h = 200 \text{ m}$
- Diamètre de la conduite, $D = 140 \text{ mm}$.
- Masse volumique du gaz carbonique à 20°C , 1 bar, $\rho_G = 1,828 \text{ kg/m}^3$
- On considère que la pression atmosphérique est de 1 bar.

5.1 Solubilité du gaz carbonique

La solubilité du gaz carbonique dans l'eau est décrite par la loi de Henry (Perry & Green, 1984, p. 3-97, 3-101). Cette loi relie la fraction massique en gaz dissous de la solution, y , et la pression partielle, P_S de la phase gazeuse par,

$$P_S = Hy \quad (\text{F.3})$$

où P_S est la pression de saturation. En supposant que la phase gazeuse ne contient que du gaz carbonique, p_S est donc la pression de la phase gazeuse. Le dégazage est décrit de la façon simplifiée suivante. Lorsque la pression est supérieure à la pression calculée par (F.3), le gaz reste en solution. Lorsque la pression est inférieure à cette même valeur, la fraction massique de gaz dissous, y , s'adapte à la pression locale en suivant la loi de Henry (F.3).

En première approximation, on considère que la constante H , ne varie pas avec la pression. On peut la calculer sachant que l'on peut dissoudre 34,2 g de CO_2 dans un kg d'eau à 25 bar et 20°C (Perry & Green, 1984, tableau 3-125, p. 3-101).

Calculer la fraction massique y des gaz dissous correspondant et la constante de Henry pour le gaz carbonique. Calculer la pression statique, p_1 à l'entrée (base) du tube. Calculer la pression de saturation, p_S , correspondant à la concentration de gaz carbonique des eaux profondes. En déduire que la partie basse de la colonne fonctionne en écoulement monophasique et que la partie supérieure fonctionne en écoulement diphasique.

5.2 Modélisation de la partie monophasique

On considère la colonne de la figure F.1. On oriente l'axe des z vers le haut et on place l'origine à la base du tube et on considère que tous les écoulements sont stationnaires. Soit w_L la vitesse moyenne de l'écoulement dans la partie monophasique et M le débit massique correspondant. On suppose que l'écoulement liquide est incompressible et on ne prendra pas en compte la perte de pression singulière à l'entrée de la conduite.

Ecrire le bilan de masse et de quantité de mouvement pour la partie monophasique. En considérant que le frottement pariétal est décrit par la relation de Blasius, en déduire la variation de pression dans la partie monophasique. On appellera f le coefficient de frottement pariétal. Déterminer en fonction de la vitesse, la position, z_S , à laquelle le dégazage débute.

5.3 Bilan de masse dans la partie diphasique

L'écoulement comprend deux constituants chimiques différents. Il convient donc de faire des bilans de masse pour chaque espèce en prenant précisément en compte leur présence respective dans chaque phase. Soit x le titre massique de gaz de l'écoulement et y le titre massique de CO_2 dissous dans la phase liquide. En considérant que la concentration en CO_2 suit la loi de Henry, déterminer la relation entre le titre massique de gaz dissous dans le liquide, y , et la pression.

Ecrire le bilan de masse de l'eau seule, on notera M_L le débit masse du liquide. En déduire la relation entre M et M_L , y et y_0 . Exprimer le débit massique de gaz carbonique contenu dans la phase liquide en fonction de M_L et de y .

On notera M_G le débit masse de gaz constituant la phase gazeuse de l'écoulement. Ecrire le bilan de masse de gaz carbonique contenu dans l'écoulement diphasique. En déduire l'expression du débit masse de gaz carbonique en fonction de M , M_L , y et y_0 .

Ecrire le bilan de masse de la partie diphasique. En déduire que la vitesse massique du mélange $G = \rho w$ est constante où on notera ρ la masse volumique du mélange.

Finalement, en déduire la relation entre le titre massique de gaz de l'écoulement, x , et les fractions massiques de gaz dissous y et y_0 .

5.4 Modèle homogène et taux de vide

Dans l'hypothèse du modèle homogène, donner la relation entre le titre massique de gaz x et le taux de vide α . Calculer le titre et le taux de vide en sortie de conduite. On notera avec l'indice 2 les quantités relatives à la sortie du tube.

Le calcul complet de l'écoulement montre que le taux de vide et la masse volumique du mélange évolue à peu près linéairement avec l'altitude dans la partie diphasique. En négligeant la masse volumique du gaz devant celle du liquide, en déduire la valeur moyenne de la masse volumique, $\bar{\rho}$ dans la partie diphasique.

$$\bar{\rho} = \frac{1}{h - z_S} \int_{z_S}^h \rho \, dz \quad (\text{F.4})$$

5.5 Bilan de quantité de mouvement du mélange

Ecrire le bilan de masse dans la partie diphasique de la conduite. On appellera ρ la masse volumique du mélange et w la vitesse moyenne du mélange. En déduire que la vitesse massique $G = \rho w$ est constante dans la partie diphasique.

Ecrire le bilan de quantité de mouvement du mélange dans l'hypothèse du modèle homogène. En déduire la variation de pression le long de la partie diphasique de la conduite et décrire les différents termes intervenant dans cette équation. En raison de la valeur du titre, quelle méthode simple peut-on proposer pour décrire le frottement pariétal ?

Estimer, par une méthode que vous justifierez, la variation de pression par accélération. Par rapport à quel terme du bilan de quantité de mouvement pouvez-vous la comparer ? Peut-on la négliger ?

En intégrant le bilan de quantité de mouvement sur la partie diphasique, montrer que la vitesse dans la partie monophasique w_L est solution d'une équation de la forme,

$$w_L^2 = \frac{p_S - p_a - \bar{\rho}g(h - z_S)}{\rho_L(\frac{\rho_L}{\rho_2} - 1) + \frac{2}{D}\rho_L^2\left(\overline{\frac{f}{\rho}}\right)(h - z_S)} \quad (\text{F.5})$$

où les notations $\bar{\rho}$ et $\overline{(f/\rho)}$ représentent les valeurs moyennes des quantités correspondantes sur la partie diphasique de l'écoulement et où z_S est l'altitude où débute le dégazage.

Pour estimer le frottement moyen dans la partie diphasique, on considère encore que le taux de vide varie linéairement avec l'altitude dans la zone diphasique. En déduire l'évolution de la masse volumique moyenne, de la vitesse et du coefficient de frottement dans la partie diphasique. On négligera la masse volumique du gaz devant celle du liquide. En déduire que le frottement moyen se met sous la forme,

$$\overline{\left(\frac{f}{\rho}\right)} = \frac{1}{h - z_S} \int_{z_S}^h \frac{f}{\rho} \, dz = A \frac{f_L}{\rho_L} \quad (\text{F.6})$$

où f_L est le coefficient de frottement dans la partie monophasique, A est un coefficient numérique ne dépendant que de ρ_L et ρ_2 . On pourra s'aider de l'identité suivante,

$$\int_0^1 (1 - au)^{-3/4} \, du = \frac{4}{a} (1 - (1 - a)^{1/4}) \quad (\text{F.7})$$

5.6 Application numérique

Le calcul de la vitesse liquide et de l'altitude où débute le dégazage doivent être effectués par itérations. On propose le schéma suivant. Calculer l'abscisse z_S à laquelle le dégazage débute en utilisant l'analyse de la partie monophasique puis calculer la vitesse liquide en utilisant le résultat de l'analyse de la partie diphasique de la conduite. On pourra par exemple démarrer les itérations avec une estimation de la vitesse de 6,5 m/s. 4 itérations devraient suffire pour estimer la vitesse avec trois chiffres significatifs.

En déduire le débit masse total extrait du lac et le débit masse gaz carbonique évacuée dans la phase gaz par l'installation. On estimera le débit masse de gaz M_G puis le débit volumique Q_G . On estime à 5 millions de m³ par an le taux de recharge en gaz carbonique du lac. Que pensez-vous de l'efficacité du dispositif ?

5.7 Efforts sur la conduite

La conduite est maintenue en place par des ballasts accrochés le long de la conduite qui est arrimée à une barge. Déterminer la nature des efforts verticaux appliqués sur la conduite. Montrer que ces efforts sont de deux types : certains sont indépendants de l'écoulement et d'autres n'existent que lorsqu'il y a écoulement. Quelle est la variation des efforts appliqués sur la conduite lorsque l'installation se met en régime ? Supposez que l'installation soit placée sur une barge au milieu du lac. Que pensez-vous qu'il puisse arriver lors de la mise en route de l'installation ?

5.8 Question bonus

La validation du prototype a été effectuée lors d'une série d'expériences en 1993. On a notamment mesuré une vitesse moyenne d'écoulement de 3,3 m/s environ. Quels sont d'après vous les raisons de cette différence ?

Vous pourrez trouver une solution rédigée de ce problème à partir du 1 mars 2003 à l'adresse suivante : herve.lemonnier.sci.free.fr/TPF/TPF.htm

Corrigé du devoir surveillé d'écoulements diphasiques du 26 février 2003

5 Dégazage du lac de Nyos

5.1 Solubilité du gaz carbonique

La solubilité du gaz carbonique dans l'eau est décrite par la loi de Henry (Perry & Green, 1984, p. 3-97, 3-101). A l'équilibre thermodynamique, cette loi relie la fraction massique en gaz dissous de la solution, y , et la pression partielle, P_S de la phase gazeuse par,

$$P_S = Hy \quad (\text{F.1})$$

où P_S est la pression de saturation. On supposera par la suite que la phase gazeuse n'est constituée que par le gaz carbonique. En conséquence, P_S sera également la pression du gaz. En première approximation, on a considéré que la constante H , ne varie pas avec la pression. On la calcule sachant que l'on peut dissoudre 34,2 g de CO_2 dans un kg d'eau à 25 bar et 20°C (Perry & Green, 1984, tableau 3-125, p. 3-101). La fraction massique de gaz est le rapport des masses des différents constituants. Elles donnée donnée par,

$$y = \frac{m_{\text{CO}_2}}{m_L + m_{\text{CO}_2}} \approx 0,0331 \quad (\text{F.2})$$

où m_{CO_2} et m_L représentent les masses des constituants considérés. La constante de Henry s'en déduit par,

$$H = \frac{P_S}{y} = \frac{25}{0,0331} \approx 756 \text{ bar} \quad (\text{F.3})$$

La pression statique, p_1 en bas de la colonne est égale à la pression hydrostatique dans le lac à la profondeur de 200 m.

$$p_1 = p_a + \rho_L gh = 10^5 + 1000 \times 9,81 \times 200 \approx 20,62 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 20,62 \text{ bar} \quad (\text{F.4})$$

où p_a est la pression atmosphérique. La pression de saturation correspondant à la concentration des eaux profondes est donnée par la loi de Henry (F.1). Sachant que la fraction massique de gaz dissous au fond est de $11 \cdot 10^{-3}$, on a

$$P_S = Hy_0 \approx 756 \times 11 \cdot 10^{-3} \approx 8,32 \text{ bar} \quad (\text{F.5})$$

Cette valeur est par ailleurs proche de la pression dans une bouteille de champagne qui est de l'ordre de 6 bar. La pression statique en bas de la colonne, p_1 est supérieure à la pression de saturation p_S correspondant aux conditions d'équilibre au fond, l'écoulement y est donc monophasique. La pression dans la colonne varie entre p_1 et la pression atmosphérique p_a . En conséquence la pression de saturation sera atteinte en partie médiane du tube. Dans la partie supérieure du tube, la pression est inférieure à la pression de saturation et un dégazage partiel interviendra. La partie inférieure de la colonne fonctionne donc en écoulement monophasique et la partie supérieure en écoulement diphasique.

5.2 Modélisation de la partie monophasique

On considère la colonne de la figure F.1. On oriente l'axe des z vers le haut et on place l'origine à la base du tube. Soit w la vitesse moyenne de l'écoulement dans la partie monophasique et M le débit massique correspondant. Le bilan de masse de la partie monophasique de la colonne s'écrit simplement,

$$\frac{dM}{dz} = 0 \Rightarrow M = \rho_L w = \text{cste} \quad (\text{F.6})$$

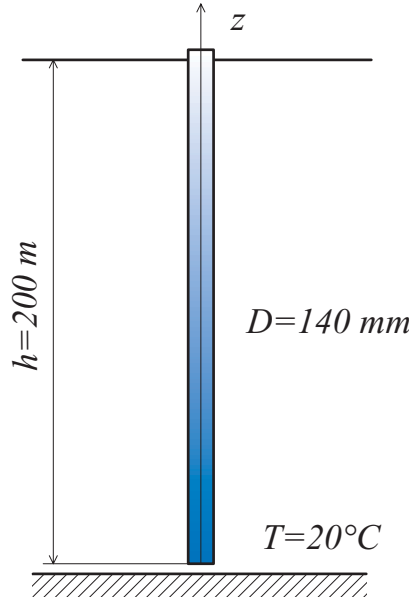


Figure F.1: Représentation schématique du tube permettant le dégazage des eaux profondes du lac de Nyos.

Le bilan de quantité de mouvement s'écrit,

$$A \frac{d}{dz} \rho_L w^2 = -A \frac{dp}{dz} - \mathcal{P} \tau_W - A \rho_L g \quad (\text{F.7})$$

où P et A sont respectivement le périmètre et l'aire de la section de la conduite et τ_W est le frottement pariétal donné par,

$$\tau_W = \frac{1}{2} f \rho_L w^2, \quad f = 0,079 Re_L^{-0,25} \quad (\text{F.8})$$

où Re_L est le nombre de Reynolds de l'écoulement liquide. L'écoulement étant incompressible et f est le coefficient de frottement qui est donné par la corrélation de Blasius. M étant constant, on en déduit de w l'est aussi d'après (F.6). Le terme d'accélération dans le bilan de quantité de mouvement est donc identiquement nul et le terme de frottement est uniforme. En conséquence en intégrant (F.7) entre le fond et la cote z , on a,

$$\int_0^z \frac{dp}{dz} dz = p(z) - p_1 = -\left(\frac{4}{D} \tau_W + \rho_L g\right) z \quad (\text{F.9})$$

d'où l'on déduit l'évolution de la pression dans la partie monophasique,

$$p(z) = p_1 - \rho_L g z - \rho_L w^2 \frac{2f(w)}{D} z. \quad (\text{F.10})$$

La pression décroît avec l'altitude et la première bulle de gaz apparaîtra à la cote z_S où la pression, $p(z_S)$ est égale à la pression de saturation correspondant à la concentration du liquide en gaz dissous, P_S ,

$$z_S = \frac{p_1 - P_S}{\rho_L \left(g + \frac{2f(w)w^2}{D} \right)} \quad (\text{F.11})$$

5.3 Bilan de masse dans la partie diphasique

Soit x le titre massique de gaz de l'écoulement et y la fraction massique de CO_2 dissous dans la phase liquide. En considérant que la concentration en CO_2 suit la loi de Henry, la fraction massique de gaz dissous y de la phase liquide est liée à la pression par,

$$y = \frac{p}{H}, \quad (\text{F.12})$$

Considérons maintenant la partie monophasique de la conduite. Soit y_0 la fraction massique de gaz dissous, l'écoulement de débit massique M est composé de deux fractions,

$$M \begin{cases} My_0 & \text{correspondant aux gaz dissous} \\ M(1 - y_0) & \text{correspondant à l'eau seule} \end{cases} \quad (\text{F.13})$$

Considérons ensuite la partie diphasique de la conduite. Soit y la fraction massique de gaz dissous dans la phase liquide, et M_L le débit massique de liquide. L'écoulement de débit massique M est composé de trois fractions,

$$M \begin{cases} M_L y & \text{correspondant aux gaz dissous} \\ M_L(1 - y) & \text{correspondant à l'eau seule} \\ M_G & \text{correspondant aux gaz relâchés} \end{cases} \quad (\text{F.14})$$

Puisque l'eau de change pas de phase, le bilan de l'eau seule s'écrit simplement,

$$M_L(1 - y) = M(1 - y_0). \quad (\text{F.15})$$

Le débit masse du gaz carbonique dans la phase gaz est appelé M_G . Le bilan de masse total du gaz carbonique qui est, rappelons-le, contenu dans le liquide et la phase gaz est simplement,

$$M_G + M_L y = M y_0, \quad (\text{F.16})$$

dont on déduit le débit de gaz,

$$M_G = M y_0 - M_L y. \quad (\text{F.17})$$

Le débit masse total de l'écoulement s'écrit simplement,

$$M = M_L y + M_L(1 - y) + M_G = M_L + M_G. \quad (\text{F.18})$$

La définition du titre massique de l'écoulement est donnée par,

$$x = \frac{M_G}{M_G + M_L} = \frac{M_G}{M}. \quad (\text{F.19})$$

En utilisant les bilans de masse (F.17) et (F.15), on obtient,

$$x = \frac{M_G}{M} = \frac{M y_0 - M_L y}{M} = y_0 - \frac{1 - y_0}{1 - y} y = \frac{y_0 - y}{1 - y} \quad (\text{F.20})$$

5.4 Modèle homogène et taux de vide

Dans l'hypothèse du modèle homogène, le taux de vide, α , est égal au titre volumique β dont la définition est,

$$\beta = \frac{Q_G}{Q_G + Q_L}, \quad (\text{F.21})$$

où Q_G et Q_L représentent respectivement le débit volumique du gaz et du liquide. On en déduit,

$$\alpha = \beta = \frac{M_G / \rho_G}{M_G / \rho_G + M_L / \rho_L} = \frac{x}{x + (1 - x) \frac{\rho_G}{\rho_L}}. \quad (\text{F.22})$$

Le taux de vide en sortie de la conduite s'en déduit en calculant successivement, pour les conditions de sortie, $p = p_a = 1$ bar, la fraction massique en gaz dissous, y , par la loi de

Henry (F.1), le titre à l'aide du résultat de la question précédente (F.20), le taux de vide par (F.22) et on trouve successivement,

$$y_2 = \frac{1}{756} \approx 1,32 \cdot 10^{-3}, \quad (\text{F.23})$$

$$x_2 = 9,69 \cdot 10^{-3}, \quad (\text{F.24})$$

$$\alpha_2 = 0,843. \quad (\text{F.25})$$

En admettant que le taux de vide évolue linéairement avec l'altitude, le taux de vide variant entre 0 en $z = z_S$ et α_2 en $z = h$, on obtient,

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\alpha_2 = 0,421, \quad (\text{F.26})$$

et la masse volumique moyenne du mélange diphasique vaut, en négligeant la masse volumique du gaz devant celle du liquide,

$$\bar{\rho} \approx (1 - \bar{\alpha})\rho_L = 578,7 \text{ kg/m}^3. \quad (\text{F.27})$$

5.5 Bilan de quantité de mouvement du mélange

Le bilan de masse du mélange a été obtenu précédemment (F.18). Il s'écrit,

$$M = A\rho w = AG = \text{cste} \quad (\text{F.28})$$

où A est l'aire de la section droite de la conduite, ρ et w sont respectivement la masse volumique et la vitesse moyenne du mélange et G est la vitesse massique. Bien que constant, M est toutefois l'inconnue principale du problème. Le bilan de quantité de mouvement du mélange s'écrit dans l'hypothèse du modèle homogène,

$$A \frac{d}{dz} \rho w^2 = -A \frac{dp}{dz} - \mathcal{P} \tau_W - A \rho g. \quad (\text{F.29})$$

La variation de pression le long de la conduite est donc donnée par

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{d}{dz} \rho w^2 - \frac{\mathcal{P}}{A} \tau_W - \rho g. \quad (\text{F.30})$$

où les trois contributions représentent respectivement, la variation de pression résultant de l'accélération du mélange, la perte de pression par frottement et le gradient de pression hydrostatique. Le premier terme représente la résistance induite par l'inertie du mélange, le second la résistance liée au frottement, et le dernier la résistance à vaincre relativement à la gravité. Les trois termes sont de même signe : ils sont négatifs.

La variation de pression par accélération sur la zone diphasique s'obtient en intégrant sur la partie diphasique le terme correspondant. En tenant compte du bilan de masse (F.28)

$$\Delta p_A = \int_{z_z}^h -\frac{d}{dz} \rho w^2 dz = - \int_{z_z}^h G \frac{dw}{dz} dz = G(w_1 - w_2). \quad (\text{F.31})$$

Il est clair que cette quantité ne peut pas être calculée sans estimer le débit dans le système, toujours inconnu à ce point. On propose de l'estimer par la méthode suivante.

Tout d'abord il faut estimer l'altitude où débute le dégazage. Pour ce faire, on considère que le diamètre de la conduite a été choisi de façon à ce que les pertes de pression par frottement restent modérées. On les néglige dans (F.11) pour estimer z_S . On obtient,

$$z_S^{(0)} = 125,4 \text{ m} \quad (\text{F.32})$$

Cette valeur est un majorant, le frottement ayant pour conséquence de faire chuter la pression plus vite et de faire apparaître le dégazage plus tôt dans la conduite. Si l'on néglige l'inertie du fluide (variation de pression par accélération), le débit résulte globalement de l'équilibre entre le frottement et la différence de pression hydrostatique entre l'intérieur et l'extérieur de la conduite. Il suffit donc d'estimer grossièrement le frottement tout en négligeant le terme d'accélération pour obtenir le débit. Supposons que le frottement dans toute la conduite soit du même ordre de grandeur en diphasique et en monophasique et qu'il soit uniforme. On obtient alors pour la partie monophasique et la partie diphasique,

$$p_1 - p_S = z_S(\rho_L g + \frac{4}{D} \frac{1}{2} \rho_L w_L^2 f(w_L)) \quad (\text{F.33})$$

$$p_S - p_2 = (h - z_S)(\bar{\rho} g + \frac{4}{D} \frac{1}{2} \rho_L w_L^2 f(w_L)). \quad (\text{F.34})$$

En additionnant ces deux équations et en notant que $p_1 - p_2 = \rho_L g$ est connu, on obtient l'équation exprimant l'équilibre entre les effets moteurs liés à l'allègement de la colonne et le frottement,

$$(\rho_L - \bar{\rho})(h - z_S)g = \frac{2}{D} \rho_L w_L^2 f h. \quad (\text{F.35})$$

On en déduit l'équation donnant la vitesse,

$$w_L^2 = \frac{Dg}{2f(w)} \left(1 - \frac{z_S}{h}\right) \left(1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho}\right). \quad (\text{F.36})$$

Le coefficient de frottement étant peu dépendant de la vitesse ($f \propto w^{-0,25}$), on résout par itérations en prenant comme valeur de départ une valeur courante comme $f = 0,003$. Une fois w obtenu, on estime f par (F.8) et on itère deux ou trois fois. On obtient les valeurs suivantes,

$$\begin{aligned} & f = 0,003, \\ w_L = 5,99 \text{ m/s}, \quad Re = 839 \cdot 10^3, \quad & f = 0,0261, \\ w_L = 6,42 \text{ m/s}, \quad Re = 899 \cdot 10^3, \quad & f = 0,0256, \\ w_L = 6,48 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (\text{F.37})$$

On retiendra,

$$w_L^{(0)} = 6,50 \text{ m/s}. \quad (\text{F.38})$$

La vitesse massique est donc donnée par,

$$G = \rho_L w_L \approx 6500 \text{ kg/m}^2/\text{s}. \quad (\text{F.39})$$

La vitesse de sortie s'obtient en calculant la masse volumique du mélange en sortie, on néglige toujours la masse volumique du gaz par rapport à celle du liquide,

$$\rho_2 \approx \rho_L(1 - \alpha_2) = 157,4 \text{ kg/m}^3, \quad (\text{F.40})$$

$$w_2 = \frac{G}{\rho_2} = 41,3 \text{ m/s}. \quad (\text{F.41})$$

Finalement on obtient une estimation de la variation de pression par accélération (F.31),

$$\Delta p_A = G(w_1 - w_2) = -2,26 \text{ bar}. \quad (\text{F.42})$$

Cette perte variation de pression de pression peut être comparée soit au terme moteur de l'écoulement lié à l'allègement de la colonne soit au terme de frottement. Ces deux termes sont en équilibre d'après (F.35). Cela n'a pas de sens de comparer la variation de pression par

accélération à la variation de pression hydrostatique dans la colonne ou dans le lac car ce n'est ni l'un ni l'autre qui est le moteur de l'écoulement mais leur *différence*. En conséquence on calcule,

$$\Delta P_G = (\rho_L - \bar{\rho})(h - z_S)g \approx 3,1 \text{ bar.} \quad (\text{F.43})$$

Il est clair que la variation de pression par accélération n'est pas négligeable et bien qu'elle soit plus petite que les deux autres effets, il faudra quand même prendre en compte ce terme.

L'intégration de l'équation (F.30) sur la partie diphasique de l'écoulement donne compte tenu que $G = \rho w$ est constant,

$$p_S - p_2 = \int_{z_S}^h \frac{d}{dz} \rho w^2 dz + \frac{4}{D} \int_{z_S}^h \frac{1}{2} \rho w^2 f(w) dz + \int_{z_S}^h \rho g dz. \quad (\text{F.44})$$

Compte tenu de la constance de la vitesse massique, $G = \rho w$,

$$p_S - p_2 = \rho_L w_L (w_2 - w_L) + \frac{2}{D} \rho_L^2 w_L^2 \int_{z_S}^h \frac{f(w)}{\rho} dz + \bar{\rho} g (h - z_S), \quad (\text{F.45})$$

ce qui en introduisant la valeur moyenne de f/ρ , donne,

$$p_S - p_2 = \rho_L w_L^2 \left(\frac{\rho_L}{\rho_2} - 1 \right) + \frac{2}{D} \rho_L^2 w_L^2 \overline{\left(\frac{f}{\rho} \right)} (h - z_S) + \bar{\rho} g (h - z_S). \quad (\text{F.46})$$

Si le taux de vide est linéaire avec l'altitude, la masse volumique l'est aussi. En négligeant la contribution du gaz, on a entre z_S et h ,

$$\rho = \rho_L - (\rho_L - \rho_2) \frac{z - z_S}{h - z_S}. \quad (\text{F.47})$$

Le coefficient de frottement f en diphasique pour le modèle homogène est estimé comme en monophasique (F.8). Le nombre de Reynolds étant proportionnel à la vitesse, et le frottement étant donné par la corrélation de Blasius, on a,

$$Re = \frac{\rho_L w D}{\mu_L} \implies f \propto w^{-1/4}. \quad (\text{F.48})$$

Le produit ρw étant constant, on a,

$$\rho = \rho_L \left(1 - \frac{\rho_L - \rho_2}{\rho_L} \frac{z - z_S}{h - z_S} \right) = \rho_L (1 - au), \quad (\text{F.49})$$

$$f = f_L \left(\frac{w}{w_L} \right)^{-1/4} = f_L \left(\frac{\rho_L}{\rho} \right)^{-1/4} = f_L (1 - au)^{1/4}, \quad (\text{F.50})$$

où la variable u et le coefficient a sont donnés par,

$$u = \frac{z - z_S}{h - z_S}, \quad (\text{F.51})$$

$$a = \frac{\rho_L - \rho_2}{\rho_L}. \quad (\text{F.52})$$

Le frottement moyen est donc donné par,

$$\overline{\left(\frac{f}{\rho} \right)} (h - z_S) = \int_{z_S}^h \frac{f}{\rho} dz = A (h - z_S) \frac{f_L}{\rho_L}, \quad (\text{F.53})$$

où le coefficient A est donné par,

$$A = \int_0^1 (1 - au)^{-3/4} du = \frac{4}{a}(1 - (1 - a)^{1/4}). \quad (\text{F.54})$$

Etant donnée la valeur du taux de vide en sortie α_2 calculée précédemment (F.25) dont on déduit la masse volumique en sortie, on obtient,

$$\rho_2 \approx (1 - \alpha_2)\rho_L = 157,4 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{F.55})$$

$$a = 0,843, \quad (\text{F.56})$$

$$A = 1,757. \quad (\text{F.57})$$

Le système permettant de déterminer l'abscisse de dégazage z_S et la vitesse monophasique w_L est donc constitué du bilan de quantité de mouvement sur la partie monophasique et du bilan de quantité de mouvement sur la partie diphasique,

$$p_S - p_a = \rho_L w_L^2 \left(\frac{\rho_L}{\rho_2} - 1 \right) + \frac{2}{D} \rho_L w_L^2 A f(w_L)(h - z_S) + \bar{\rho} g(h - z_S), \quad (\text{F.58})$$

$$p_1 - p_S = z_S(\rho_L g + \frac{2}{D} \rho_L w_L^2 f(w_L)), \quad (\text{F.59})$$

On propose de le résoudre itérativement, en tirant z_S de la seconde équation et w_L de la première

$$z_s^{(n+1)} = \frac{p_1 - p_S}{\rho_L g + \frac{2}{D} \rho_L (w_L^{(n)})^2 f(w_L^{(n)})}, \quad (\text{F.60})$$

$$(w_L^{(n+1)})^2 = \frac{p_S - p_a - \bar{\rho} g(h - z_S^{(n+1)})}{\rho_L \left(\frac{\rho_L}{\rho_2} - 1 + \frac{2}{D} A f(w_L^{(n)})(h - z_S^{(n+1)}) \right)}. \quad (\text{F.61})$$

Avec les valeurs numériques on obtient,

$$z_s^{(n+1)} = \frac{12,304 \cdot 10^5}{9810 + 1,429 \cdot 10^4 (w_L^{(n)})^2 f(w_L^{(n)})}, \quad (\text{F.62})$$

$$(w_L^{(n+1)})^2 = \frac{-4,038 \cdot 10^5 + 5677 z_S^{(n+1)}}{1000(5,353 + 25,1 f(w_L^{(n)})(200 - z_S^{(n+1)}))}. \quad (\text{F.63})$$

En partant de $w_L = 6,5 \text{ m/s}$, on obtient successivement,

$$\begin{aligned} w_L &= 6,50 \text{ m/s}, & f &= 0,00256, & z_S &= 108,4 \text{ m} \\ w_L &= 4,34 \text{ m/s}, & f &= 0,00283, & z_S &= 116,4 \text{ m} \\ w_L &= 4,77 \text{ m/s}, & f &= 0,00276, & z_S &= 114,9 \text{ m} \\ w_L &= 4,70 \text{ m/s}, & f &= 0,00277, & z_S &= 115,2 \text{ m} \\ w_L &= 4,71 \text{ m/s}, & f &= 0,00277, & z_S &= 115,1 \text{ m} \end{aligned} \quad (\text{F.64})$$

On notera la diminution des vitesses par rapport à l'estimation précédente. En effet, la partie diphasique frotte plus que la partie monophasique, le rapport des deux effets étant le coefficient A . De plus, la résistance de l'écoulement induite par l'inertie du mélange est maintenant pris en compte. L'altitude du début de la section diphasique diminue également. Elle avait été estimée sans prendre en compte le frottement dans la partie monophasique.

Le débit masse total est donné par,

$$M = A \rho_L w_L = 72,5 \text{ kg/s}. \quad (\text{F.65})$$

Le débit masse total de gaz est donné par,

$$M_G = x_2 M = 0,703 \text{ kg/s}, \quad (\text{F.66})$$

où x_2 est le titre massique de gaz en sortie. Le débit volumique de gaz est donc donné par,

$$Q_G = \frac{M_G}{\rho_G} = 0,384 \text{ m}^3/\text{s} = 12,1 \text{ Mm}^3/\text{s}. \quad (\text{F.67})$$

Le dimensionnement est donc d'un facteur 2 supérieur aux besoins (5 Mm³/an). Il faut remarquer que tout le gaz carbonique remontant à la surface n'est pas relâché dans l'atmosphère. Une petite fraction ($y_2 \ll y_0$) est encore en solution.

5.6 Efforts sur la conduite

Les efforts appliqués sur la conduite sont de deux types :

- Les efforts statiques respectivement, le poids de la conduite et des ballasts, la poussée d'Archimède, $S_T(p_1 - p_a)$ où $S_T \neq A$ est l'aire de la section droite du matériau constituant la conduite, et la réaction de l'ancrage de la conduite sur la barge.
- La réaction de la conduite à l'écoulement du fluide. Cette réaction est exactement opposée à la résultante contraintes de cisaillement pariétales appliquées par la conduite au fluide.

On peut légitimement supposer que les ballasts ont été ajustés de façon à ne pas couler la barge ! En conséquence les seuls efforts supplémentaires qui s'appliquent lorsque le système est mis en régime sont les contraintes pariétales. Le frottement de la conduite sur le fluide sont dirigés globalement vers la bas. La résultante des contraintes appliquées à la conduite sont donc dirigées vers le haut. Cette force, en séparant les contributions monophasiques et diphasiques, est donnée par,

$$F = \pi D \frac{1}{2} \rho_L w_L^2 f(z_S + A(h - z_s)) = 3,57 \text{ kN} \quad (\text{F.68})$$

Pour ne pas changer la ligne de flottaison de la barge, il faudrait la charger d'un poids de 364 kg supplémentaires. Il se trouve que pendant les essais, la conduite a été déposée au fond d'une façon simple. Elle est assemblée à la surface du lac où elle flotte. La conduite est en fait équipée d'une vanne dans sa partie basse. La vanne étant fermée, on remplit la conduite d'air ce qui assure sa flottaison. On immerge la conduite en ouvrant la vanne de fond ce qui la fait simplement couler. Les ballasts sont ensuite ajustés de façon à mettre la barge en situation de flottabilité optimale.

Durant la première mise en route, lorsque le régime s'est amorcé, le tube est remonté progressivement, mettant en péril la stabilité de la barge. Un capteur de profondeur installé en partie basse de la conduite a notamment indiqué que la base de la conduite était remontée de 45 m en 1 minute. L'arrêt d'urgence a été déclenché et un lest de 200-250 kg a été installé sur la barge. C'est bien l'ordre de grandeur de la réaction de frottement estimé.

5.7 Question bonus

Lors des essais la vitesse observée est plus faible que celle calculée ici par le modèle : 3,3 m/s contre 4,71 m/s. On remarque d'ailleurs que le lest rajouté est inférieur d'un petit facteur 2 à l'estimation proposée ici. Le frottement étant en première approximation proportionnel au carré de la vitesse, on retrouve ici aussi le même effet. Il y a en fait deux raisons simples et une raison plus subtile qui sera développée plus loin pour interpréter ces différences.

- *Le frottement est sous-estimé.* La corrélation de Blasius donne une évaluation minimale du frottement. Si la tuyauterie n'est pas lisse, le frottement peut augmenter de 50% voire d'un facteur 2 selon sa rugosité. Augmenter le frottement dans le modèle aurait pour conséquence de faire baisser le débit. Par ailleurs le frottement dans la partie diphasique est certainement sous estimé par le modèle homogène.
- *L'effet moteur, lié à l'allégement de la colonne diphasique est surestimé.* En effet le dégazage n'a sûrement pas lieu à l'équilibre thermodynamique. En débouchant une bouteille de soda ou de champagne, on observe que le retour à l'équilibre n'est pas instantané, et heureusement. Le taux de dégazage est limité par le transfert de masse aux interfaces et notamment par la quantité d'interfaces présente. On peut garder une bouteille de champagne ouverte une bonne journée, au froid, sans perdre trop de gaz carbonique car la surface libre à travers laquelle s'effectue le transfert de masse est limitée. Dans la réalité, le liquide reste sursaturé et le débit de gaz réel est toujours inférieur à celui calculé ici. En conséquence le taux de vide est surestimé par le modèle homogène à l'équilibre thermodynamique, ce qui a une conséquence directe sur l'effet moteur de l'écoulement $((\rho_L - \bar{\rho})(h - z_S)g)$.
- *L'écoulement diphasique est compressible.* La vitesse du son du modèle est atteinte à sortie de la conduite. La limitation du débit peut résulter d'un phénomène de blocage de débit analogue à celui qui se manifeste en écoulement de gaz seul. Ce dernier aspect sera abordé au paragraphe suivant.

5.8 Vers une modélisation complète

Il est manifeste que le modèle présenté ici est incomplet. Pour l'améliorer sans allonger inutilement les calculs algébriques, on peut recourir à une solution numérique du problème. Un modèle numérique permet notamment de mettre en oeuvre des modèles de frottement plus réalistes ou de prendre en compte, le déséquilibre mécanique entre les phases (vitesses moyennes différentes) ou le déséquilibre thermodynamique (transfert de masse limité par l'aire interfaciale présente). Il est bien évidemment basé sur les mêmes équations locales. La partie monophasique reste inchangée, toutefois à partir de l'abscisse z_S , on utilise le modèle diphasique,

$$\frac{d}{dz}\rho w = w \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dw}{dz} = 0, \Rightarrow G = \rho w, \quad (\text{F.69})$$

$$\frac{d}{dz}\rho w^2 = -\frac{dp}{dz} - \frac{2}{D}f\rho w^2 - \rho g, \quad (\text{F.70})$$

On rappelle que dans l'hypothèse du modèle homogène, la masse volumique est fonction du titre massique, lié à la fraction de gaz dissous par (F.23) qui ne dépend que de la pression par la loi de Henry : la masse volumique est fonction de la pression uniquement.

$$\frac{1}{\rho} = v = xv_G + (1 - x)v_L \quad (\text{F.71})$$

$$x = \frac{y_0 - y}{1 - y} \quad (\text{F.72})$$

$$y = \frac{p}{H} \quad (\text{F.73})$$

$$v_G = \frac{v_{G0}p_0}{p} \quad (\text{F.74})$$

où v est le volume massique et l'indice 0 se rapporte à des conditions de référence pour une modèle de gaz parfait isotherme. Le bilan de masse permet d'éliminer la vitesse dans le bilan

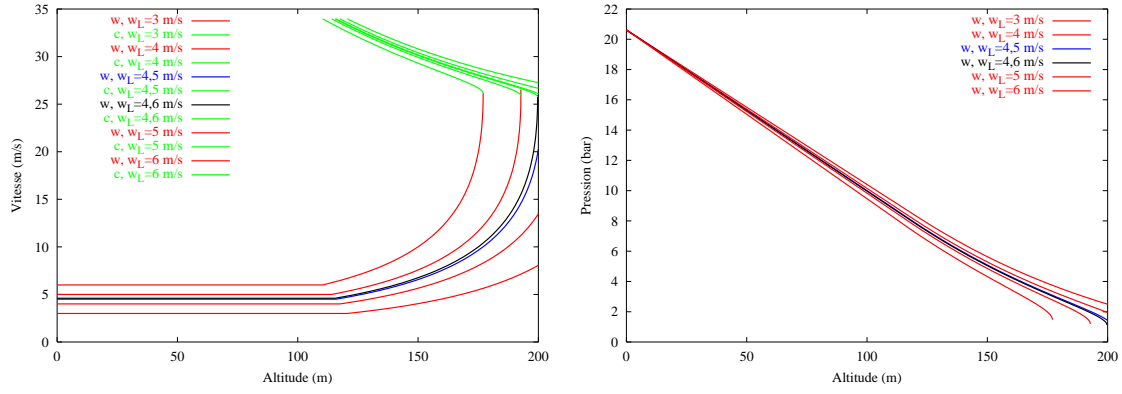


Figure F.2: Transition vers l'état critique. Evolution de la pression et de la vitesse le long de la conduite pour différentes valeurs de la vitesse liquide, w_L . Calcul : `Nyos03.for`, graphique : `crit1.plt`.

de quantité de mouvement,

$$\frac{d}{dz} \rho w^2 = G^2 \frac{d}{dz} \frac{1}{\rho} = G^2 \frac{dv}{dp} \frac{dp}{dz}. \quad (\text{F.75})$$

$\frac{dv}{dp}$ se calcule simplement en dérivant (F.71) et représente la compressibilité du mélange diphasique. Cette compressibilité comprend une petite contribution liée à la compressibilité du gaz, la compressibilité du liquide est négligeable, mais surtout une contribution liée à la variation de titre résultant de la dépressurisation : en dépressurisation le mélange, le gaz carbonique est relâché et le volume massique augmente. Ce mécanisme s'ajoute à la détente isotherme du gaz. En conséquence $\frac{dv}{dp} < 0$. L'évolution de la pression est donc régie par une simple équation différentielle non linéaire,

$$\frac{dp}{dz} = \frac{-\frac{2G^2 f}{D\rho} - \rho g}{1 + G^2 \frac{dv}{dp}} = \frac{P(p, z)}{Z(p, z)} \quad (\text{F.76})$$

L'allure de toutes les solutions de (F.76) s'analyse graphiquement en remarquant que ses lignes intégrales dans le plan (p, z) sont tangentes au vecteur de coordonnées (P, Z) . Cette technique simple permet de déterminer l'allure et la topologie des solutions sans qu'il soit nécessaire de résoudre effectivement les équations (Kestin & Zaremba, 1953).

Il est clair que P est toujours négatif. En conséquence, à faible vitesse, Z est positif et la pression décroît avec l'altitude z . Il est également évident que P ne peut s'annuler puisqu'il est la somme de deux termes strictement négatifs. En revanche, pendant la détente, la vitesse augmente et Z peut s'annuler puis changer de signe. En conséquence la courbe solution possède une tangente verticale et la ligne intégrale rebrousse chemin vers l'amont ($Z < 0$, et $P < 0$). Il y'a donc existence d'une longueur limite pour un écoulement de conditions amont données. Ce comportement est entièrement analogue à celui de l'écoulement de Fanno où le dénominateur en $1 - M^2$, où M est le nombre de Mach, joue le même rôle que Z ici.

Pour résoudre numériquement le problème, z n'étant manifestement pas le bon paramètre, on paramètre la solution de la façon suivante,

$$\frac{dp}{du} = P(p, z) \quad (\text{F.77})$$

$$\frac{dz}{du} = Z(p, z) \quad (\text{F.78})$$

où u est paramètre d'avancement le long de la solution. La solution rebrousse chemin vers l'amont dès que $Z < 0$. Le paramètre d'avancement n'apparaissant pas dans les seconds membres, cette

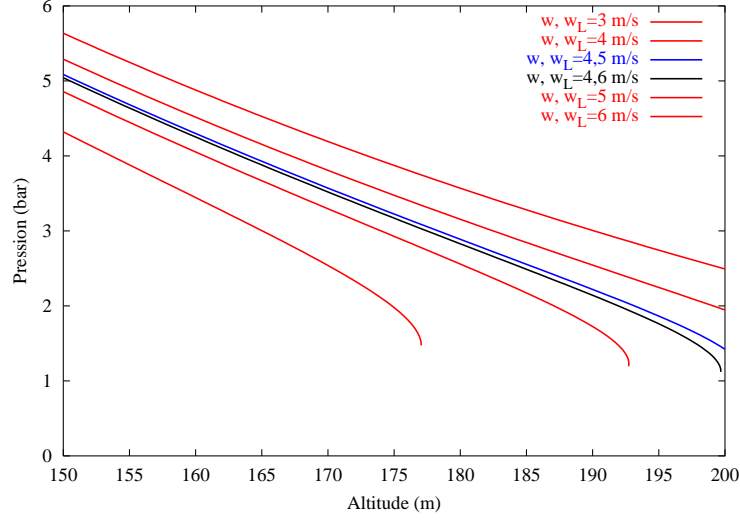


Figure F.3: Transition vers l'état critique. Evolution de la pression le long de la conduite pour différentes valeurs de la vitesse liquide, w_L . Calcul : `Nyos03.for`, graphique : `crit1.plt`.

forme s'appelle la forme autonome du système. La solution admet une tangente verticale au point où $Z = 0$,

$$G^2 = \frac{-1}{\frac{dv}{dp}} = \rho^2 w^2. \quad (\text{F.79})$$

La condition de rebroussement de la solution est donc,

$$w^2 = \frac{-v^2}{\frac{dv}{dp}} = c^2. \quad (\text{F.80})$$

La quantité c est la vitesse critique du système et joue le même rôle que la vitesse du son pour les écoulements de gaz seul. En négligeant le volume spécifique du liquide devant celui du gaz on trouve,

$$\frac{dv}{dp} \approx v_G \left(\frac{x}{p} + \frac{1}{H} \right), \quad (\text{F.81})$$

qui montre qu'en première approximation, la compressibilité du mélange résulte de la compressibilité du gaz et de la solubilité du gaz carbonique.

La figure F.2 montre que pour une valeur de la vitesse liquide w_L inférieure à 4,5 m/s, les solutions existent de l'amont vers l'aval et que la vitesse w est toujours inférieure à la vitesse critique c . Pour des valeurs de la vitesse de liquide supérieures à 4,6 m/s, la solution rebrousse avant la fin du domaine. Ces solutions correspondent à des écoulements possibles dans des tubes de longueur inférieure à l'abscisse de rebroussement, z_* . On remarque que lorsque la solution rebrousse (voir figure F.2), la vitesse du mélange w est égale à la vitesse critique. Cette vitesse critique est beaucoup plus petite que la vitesse du son dans le gaz. Elle est de l'ordre de 25 m/s dans les conditions de l'exemple. C'est un comportement fréquent en écoulements diphasiques.

La figure F.3 montre que la pression de sortie est une fonction continue de la vitesse liquide pour $w_L < 4,5$ m/s. Au delà de cette valeur, il n'existe plus de solution atteignant la sortie de la conduite. La pression de sortie minimale, pour laquelle existe une solution, p_* , est de l'ordre de 1,3 bar. C'est la pression critique du système. Pour une pression aval inférieure à

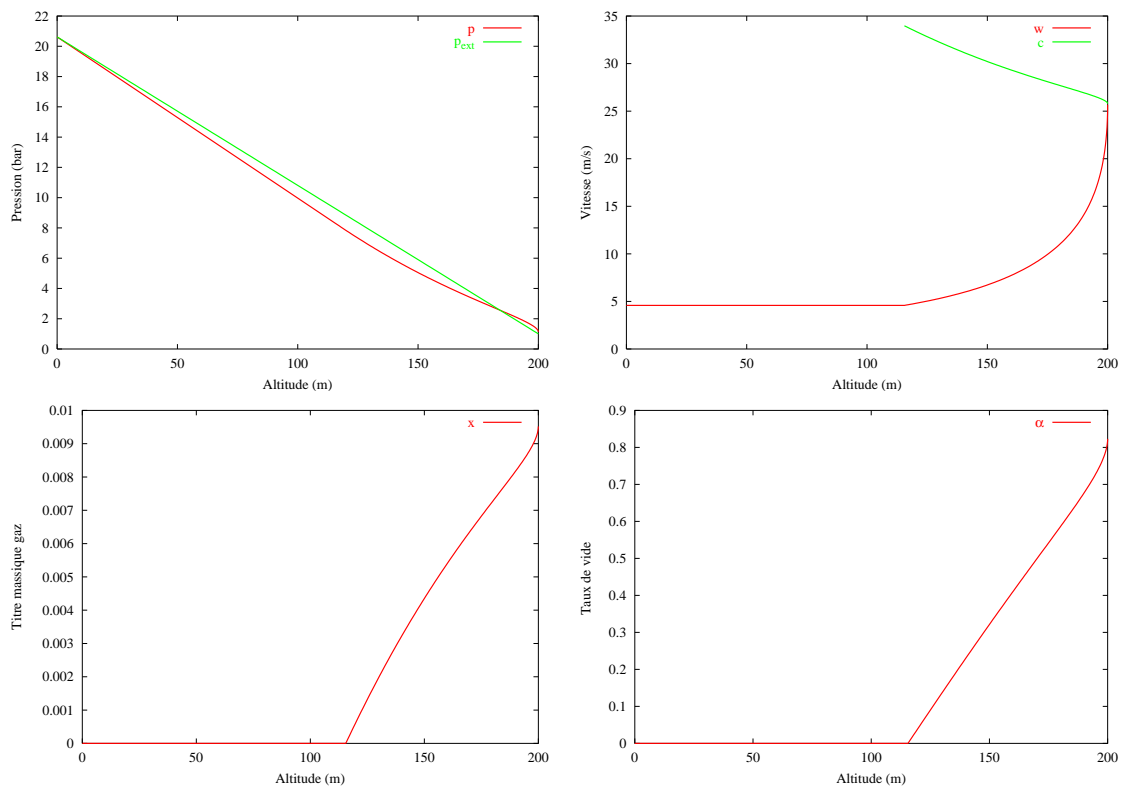


Figure F.4: Evolution de la pression, de la vitesse, du titre et du taux de vide le long de la conduite pour le régime critique, $w_L = 4,587$ m/s. Calcul : `Nyos03.for`, graphique : `nyos03.plt`.

cette vitesse, il n'existe aucune solution pour une conduite de longueur $h = 200$ m, la pression de sortie ne peut plus être imposée, l'écoulement étant critique. L'état du système est bloqué et le débit ne peut plus augmenter et reste tel que la vitesse critique soit atteinte à la sortie.

On peut rechercher par itérations successives la solution critique du système. La figure F.4 montre l'évolution des différents paramètres le long de la conduite.

On observe que la pression de sortie est supérieure à la pression atmosphérique, que la vitesse est critique en sortie. Le taux de vide évolue à peu près linéairement avec l'altitude. La pression de sortie est de l'ordre de 1,13 bar ce qui est très proche de la pression atmosphérique. L'erreur introduite par la non prise en compte du caractère critique est donc faible, ce qui explique la prédiction relativement bonne du modèle approché discuté dans ce problème.

La discussion complète de la solution analytique du problème passe donc par la connaissance de la pression critique de sortie. Si la pression aval est supérieure à la pression critique, la méthode utilisée est correcte. Dans le cas contraire elle est erronée car le débit ne dépend plus de la pression aval. Pour calculer le régime critique, la même procédure doit être appliquée mais en prenant la pression critique comme pression aval (p_* à la place de p_a). Le problème est alors algébriquement plus compliqué puisque la pression critique devient une nouvelle inconnue.

Le modèle permet d'étudier simplement l'effet du frottement sur le débit. Le modèle peut être modifié en considérant le coefficient de frottement constant ce qui est une bonne approximation du frottement en régime turbulent sur une paroi rugueuse. La formule de Blasius donne un coefficient de frottement proche de 0,003 dans nos conditions. On observe que la vitesse liquide est une fonction rapidement décroissante du coefficient de frottement. On observe au tableau F.1 qu'il suffit de doubler environ le coefficient de frottement pour retrouver

f (-)	w_L (m/s)	p_2 (bar)	nature
0,002	4,863	1,215	critique
0,003	4,297	1,043	critique
0,004	3,894	0,984	subcrit.
0,005	3,591	1,000	subcrit.
0,006	3,344	1,013	subcrit.
0,007	3,137	1,013	subcrit.

Tableau F.1: Effet du coefficient de frottement constant f , sur la vitesse dans le tube. Programme : `nyos03.for`.

la vitesse mesurée dans l'expérience.

L'analyse peut être raffinée pour prendre en compte le déséquilibre mécanique entre phases ou le déséquilibre thermodynamique. La méthodologie de la résolution numérique serait identique. L'analyse mathématique du phénomène de blocage de débit est détaillée de façon très pédagogique par Bilicki *et al.* (1987).

Devoir surveillé d'écoulements diphasiques du 1^{er} mars 2004

Modalités

Le devoir comporte, d'une part, des questions de cours et, d'autre part, un problème. Tous les documents et moyens de calcul sont autorisés. On demande des réponses justifiées et concises qui peuvent éventuellement être documentées par un croquis dont la légende sera bien explicitée. On notera que certaines questions du problème sont indépendantes.

1 Taux de vide

Considérons un écoulement diphasique gaz-liquide dans une conduite. Donner la définition de la fraction surfacique instantanée de la phase gaz, R_{G2} , donner sa relation avec la fonction indicatrice de la phase gaz, X_G . Donner la définition du taux de présence local de la phase gaz, α . Donner sa relation avec la fonction indicatrice de phase X_G . Démontrer l'identité suivante exprimant la commutativité des opérateurs de moyennes,

$$\langle \alpha_G \rangle_2 = \overline{R_{G2}} \quad (\text{F.1})$$

Décrire une technique de mesure du taux de présence de la phase gaz (taux de vide local). A quoi peut servir l'identité (F.1) ?

2 Equations de bilan aux interfaces et relations de saut

Dans cette question, on appellera la masse volumique, ρ , la vitesse, \mathbf{v} , le tenseur de contraintes, \mathbb{T} , la pression, p , l'énergie interne par unité de masse, u , et \mathbf{F} , les forces de volume.

2.1 Bilan locaux

Ecrire les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale sous forme locale en écoulement monophasique. Montrer qu'elles peuvent se mettre sous la forme générale suivante,

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \psi + \nabla \cdot \mathbb{J} - \rho \phi = 0 \quad (\text{F.2})$$

où on donnera la définition des différentes grandeurs, ψ , \mathbb{J} et ϕ pour chaque équation de bilan considérée (sous la forme d'un tableau).

2.2 Bilan aux interfaces

Dans cette question, on notera par l'indice $k = 1, 2$ la phase considérée, \mathbf{n}_k , la normale extérieure à la phase k et, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k$, la vitesse de déplacement de l'interface. Sans prendre en compte les effets de la tension superficielle, montrer, en explicitant toutes les étapes du raisonnement, que les équations de bilan aux interfaces s'expriment sous la forme suivante,

$$\sum_{k=1,2} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{J}) = 0 \quad (\text{F.3})$$

où on rappellera la définition et la signification physique de \dot{m}_k .

2.3 Bilan d'enthalpie à l'interface

En négligeant, (i) la variation de l'énergie cinétique à la traversée de l'interface, (ii) le saut de pression à l'interface et (iii) les effets visqueux, montrer que le bilan d'énergie à l'interface relie seulement le saut d'enthalpie à l'interface et les flux de chaleurs à l'interface. On notera, h , l'enthalpie par unité de masse. Donner la signification physique de la quantité $h_V - h_L$.

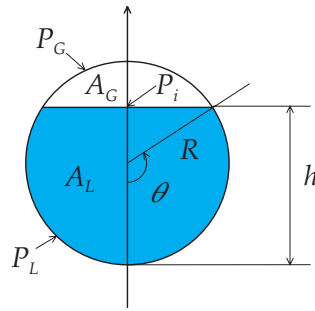


Figure F.1: Coupe de la conduite horizontale considérée dans ce problème.

3 Flooding

Décrire succinctement le phénomène de flooding. A quelle transition d'écoulement diphasique en conduite verticale est elle associée ? Il est inutile de donner les corrélations permettant de calculer ses conditions d'apparition.

4 Analyse de l'écoulement stratifié

L'objectif de ce problème est d'étudier l'écoulement stratifié dans une conduite horizontale et ses conditions de stabilité afin de retrouver les résultats sur lesquels Taitel & Dukler (1976) s'appuient pour modéliser les transitions de régime d'écoulement diphasique en conduite horizontale. De plus, le modèle utilisé permet de calculer de façon directe la perte de pression par frottement d'un écoulement stratifié que l'on comparera à l'approche empirique de Lockhart et Martinelli.

On considère un écoulement stratifié horizontal d'eau et d'air dans une conduite circulaire de diamètre, D , et de rayon, R , dont l'aire de la section droite est notée A . On notera, A_G , l'aire de la section droite de la conduite occupée par le gaz et, A_L , celle occupée par le liquide (voir figure F.1). L'écoulement est isotherme, $T = 20^\circ\text{C}$, et il n'y a pas de changement de phase.

4.1 Bilans de masse

Ecrire les bilans de masse moyennés dans la section pour chaque phase. On notera, ρ , la masse volumique, v , la composante de la vitesse selon l'axe, Oz , de la conduite et, \mathbf{e}_z , le vecteur unitaire porté par l'axe Oz . On notera par l'indice L les grandeurs relatives au liquide et par G les grandeurs relatives au gaz. On ne demande ici que l'expression du bilan pour la phase k .

4.2 Bilans de quantité de mouvement

Ecrire les bilans de quantité de mouvement moyennés sur la section pour chaque phase et projeté sur la direction \mathbf{e}_z . On négligera la variation longitudinale des contraintes visqueuses et on donnera la signification physique de chaque terme. Les deux équations étant symétriques, on ne demande que l'équation relative à la phase k . On appellera C et C_k respectivement l'intersection de l'interface et de la partie de la conduite mouillée par la phase k avec le plan d'abscisse z et \mathbf{n}_k la normale à la phase k dirigée vers l'extérieur de la phase k .

4.3 Application de la forme limite du théorème de Gauss

Rappeler l'expression de la forme limite du théorème de Gauss pour une section de conduite. En appliquant cette identité au vecteur \mathbf{e}_z , montrer que l'on obtient l'identité suivante,

$$\frac{\partial A_k}{\partial z} + \int_{C(z,t)} \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_{kC} \cdot \mathbf{n}_k} dl = 0 \quad (\text{F.4})$$

4.4 Simplification des bilans de quantité de mouvement

On considère maintenant que la contrainte de cisaillement est uniforme sur l'interface et sur la paroi et que la pression est uniforme sur l'interface. Montrer, en séparant la partie visqueuse et la partie relative à la pression du tenseur des contraintes et, en utilisant l'identité (F.4), que les bilans de quantité de mouvement moyennés dans la section se mettent sous la forme,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k v_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k v_k^2 \rangle_2 = - \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle p_k \rangle_2 + p_{ki} \frac{\partial A_k}{\partial z} + \tau_{ki} P_i + \tau_{kw} P_k \quad (\text{F.5})$$

où p_{ki} représente la pression à l'interface, τ_{ki} représente la contrainte visqueuse appliquée à l'interface sur la phase k , τ_{kw} est la contrainte pariétale et P_i et P_k représentent respectivement le périmètre de l'interface et de la conduite mouillée par la phase k (voir figure F.1).

4.5 Etude de l'écoulement permanent et établi

En écoulement permanent et établi, montrer que le gradient de pression dans la conduite ne dépend que du frottement sur la paroi. Montrer de plus que la hauteur du liquide dans la conduite est déterminée par l'équation d'équilibre suivante,

$$\tau_{Li} P_i \left(\frac{1}{A_L} + \frac{1}{A_G} \right) + \frac{\tau_{Lw} P_L}{A_L} - \frac{\tau_{Gw} P_G}{A_G} = 0. \quad (\text{F.6})$$

4.6 Calcul du niveau de liquide

Pour résoudre l'équation (F.6) on procède comme Taitel & Dukler (1976). On considère que le frottement du liquide et du gaz sur la paroi est décrit par la corrélation de Blasius que l'on écrira sous la forme,

$$f = 0,046 Re^{-0,2} \quad (\text{F.7})$$

où f est le coefficient de frottement et Re est le nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne de la phase considérée et le diamètre hydraulique. On considère, de plus, que le frottement du gaz sur la paroi et sur l'interface sont proches et que l'on peut les confondre. Pour évaluer le diamètre hydraulique coté gaz, on considère que la paroi et l'interface contribuent de façon égale tandis que pour le liquide, seule la paroi contribue significativement au frottement. En conséquence on prendra,

$$D_G = \frac{4A_G}{P_G + P_i} \quad (\text{F.8})$$

$$D_L = \frac{4A_L}{P_L} \quad (\text{F.9})$$

Montrer dans ces conditions, en justifiant les signes des différentes quantités, que l'équation d'équilibre se met sous la forme suivante,

$$X^2 f(A, D, A_L, P_L, D_L) - g(A, D, A_G, P_G, D_G, P_i) = 0 \quad (\text{F.10})$$

où f et g sont des fonctions que l'on déterminera et X est la paramètre de Lockhart et Martinelli. Il est inutile de déterminer ici les relations géométriques entre les différentes variables intervenant dans (F.10) et h . On rappelle que X est défini par,

$$X^2 = \left| \frac{(dP/dz)_{LS}}{(dP/dz)_{GS}} \right|. \quad (\text{F.11})$$

où l'indice S rappelle que l'on calcule la perte de pression par frottement en considérant que la phase considérée circule seule dans la conduite (avec le même débit qu'en écoulement diphasique). En cas de besoin, on appellera J_k la vitesse débitante de la phase k .

Montrer de la même manière que la perte de pression de l'écoulement diphasique se met sous la forme suivante,

$$\left(\frac{dP}{dz} \right) = \left(\frac{dP}{dz} \right)_{LS} h(A, D, A_L, D_L, P_L) + \left(\frac{dP}{dz} \right)_{GS} k(A, D, A_G, D_G, P_G) \quad (\text{F.12})$$

où l'on donnera l'expression de h et k .

4.7 Application numérique

On considère un écoulement d'eau et d'air dans une conduite de 5,1 cm de diamètre. On considérera les propriétés physiques suivantes pour l'eau,

$$\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3, \mu_L = 10^{-3} \text{ Pa s}, \quad (\text{F.13})$$

et pour l'air,

$$\rho_L = 1,20 \text{ kg/m}^3, \mu_L = 18 \cdot 10^{-6} \text{ Pa s}. \quad (\text{F.14})$$

On considère de plus les débits suivants,

$$J_L = 0,1 \text{ m/s}, J_G = 2 \text{ m/s}. \quad (\text{F.15})$$

Calculer le titre massique de gaz, x , et montrer, en utilisant l'expression (F.7) du frottement, que le paramètre de Lockhart et Martinelli se met sous la forme,

$$X \triangleq \left(\frac{\mu_L}{\mu_G} \right)^{0,1} \left(\frac{1-x}{x} \right)^{0,9} \left(\frac{\rho_G}{\rho_L} \right)^{0,5} \quad (\text{F.16})$$

Calculer la valeur du paramètre de Lockhart Martinelli, X , pour les conditions considérées plus haut et justifier l'existence de l'écoulement stratifié.

Dans l'équation d'équilibre (F.10) f et g ne sont fonction que du rapport h/D . En conséquence, en résolvant cette équation pour une valeur de X donnée, on détermine la hauteur de liquide. La solution de cette équation est représentée à la figure F.2. Déterminer graphiquement la hauteur de liquide sans dimension, h/D et la valeur de A_L/A .

Dans l'équation déterminant la perte de pression (F.12), h et k ne sont fonction que de h/D . Ces fonctions sont tracées à la figure F.3. En déduire la valeur de la perte de pression par frottement.

4.8 Méthode de Lockhart et Martinelli

Déterminer la perte de pression et le taux de liquide de l'écoulement par la méthode de Lockhart et Martinelli. Comparer les valeurs obtenues à celles obtenues précédemment. Qu'en concluez-vous ?

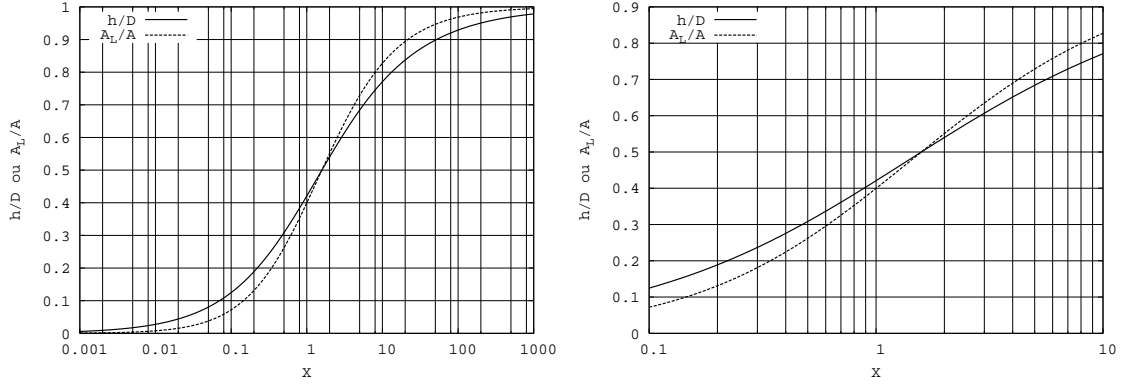


Figure F.2: Solutions de l'équation d'équilibre (F.10). X est le paramètre de Lockhart Martinelli.

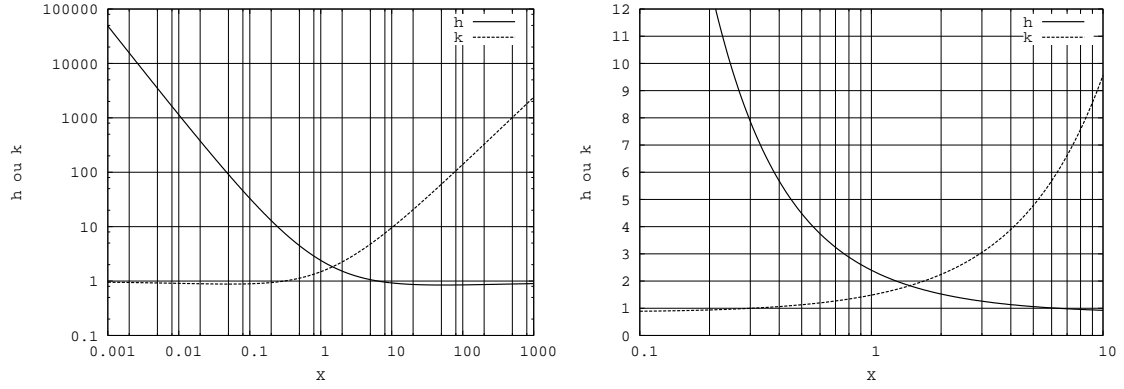


Figure F.3: Evolution des facteurs h et k de l'équation déterminant les pertes de pression. X est le paramètre de Lockhart Martinelli.

4.9 Etude de l'écoulement stratifié instationnaire

Dans l'approximation monodimensionnelle, on pose $\langle v_k \rangle_2 = U_k$ et $\langle v_k^2 \rangle_2 = U_k^2$, on suppose de plus que la répartition de pression selon la verticale est hydrostatique et on néglige le saut de pression à l'interface ($p_{Li} = p_{Gi}$). On supposera également que l'écoulement est incompressible. En combinant le bilan de quantité de mouvement avec le bilan de masse, et en ne gardant, dans les équations, que la pression moyenne du liquide que l'on notera p , montrer que l'on obtient les deux équations de quantité de mouvement suivantes,

$$A_L \rho_L \frac{\partial U_L}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_L h A'_L \frac{\partial h}{\partial z} + A_L \rho_L U_L \frac{\partial U_L}{\partial z} + A_L \frac{\partial p}{\partial z} = \tau_{Li} P_i + \tau_{Lw} P_L \quad (\text{F.17})$$

$$\begin{aligned} & A_G \rho_G \frac{\partial U_G}{\partial t} - \frac{1}{2} A_G \rho_L^* g A_G \frac{\partial h}{\partial z} \\ & + A_G \rho_G U_G \frac{\partial U_G}{\partial z} + A_G \frac{\partial p}{\partial z} = -\tau_{Li} P_i + \tau_{Gw} P_G. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

où l'on posera,

$$-\frac{1}{2} A_G \rho_L^* g A_G = \frac{1}{2} A'_L \rho_G g (D - h) - \frac{1}{2} A_G (\rho_L - \rho_G) g. \quad (\text{F.19})$$

avec $A'_L = \frac{dA_L}{dh}$.

Montrer que les deux bilans de masse et de quantité de mouvement se mettent sous la forme,

$$\mathbb{A} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{B} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} = \mathbf{C}, \quad (\text{F.20})$$

où le vecteur \mathbf{X} est donné par,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} h \\ U_L \\ U_G \\ p \end{pmatrix} \quad (\text{F.21})$$

On explicitera les matrices \mathbb{A} , \mathbb{B} et le vecteur \mathbf{C} . On recherchera ensuite la solution de (F.20) sous la forme,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1, \quad (\text{F.22})$$

et on supposera que

$$\epsilon \ll 1. \quad (\text{F.23})$$

On donnera la signification de \mathbf{X}_0 . En linéarisant (F.20) autour de \mathbf{X}_0 , montrer que la perturbation, \mathbf{X}_1 , vérifie l'équation,

$$\mathbb{A}(\mathbf{X}_0) \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial t} + \mathbb{B}(\mathbf{X}_0) \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial z} = \mathbb{D} \mathbf{X}_1. \quad (\text{F.24})$$

où on donnera l'expression et l'interprétation de \mathbb{D} . Rechercher ensuite la solution sous forme d'ondes progressives,

$$\mathbf{X}_1 = \hat{\mathbf{X}}_1 \exp(i\omega t - ikx), \quad (\text{F.25})$$

où le nombre d'onde k est réel. Donner l'expression de la vitesse de propagation, c , de l'onde et montrer que dans l'hypothèse des grandes longueurs d'onde ($k \rightarrow 0$), la vitesse de propagation est donnée par une équation du second degré dont on explicitera l'expression. On recommande de poser,

$$-\frac{1}{2}\rho_L^* A_L A_G g + \frac{1}{2}\rho_L A_G A_L' g h = C_1(\rho_G - \rho_L)g A_G A_L, \quad (\text{F.26})$$

avec,

$$2C_1 = 1 + \frac{A_L'(\rho_G A_L(D - h) - \rho_L A_G h)}{(\rho_G - \rho_L)A_G A_L}. \quad (\text{F.27})$$

Montrer que pour que le système soit stable, il faut que les racines de cette équation sont réelles, ce qui donne le critère de stabilité de l'écoulement stratifié. Expliciter ce critère, et montrer que la stabilité est obtenue lorsque la différence de vitesse entre les phases est inférieure à une vitesse critique que l'on déterminera. Montrer que pour les conditions de l'écoulement étudié ici, l'écoulement est stable.

5 Analyse de l'écoulement stratifié

L'objectif de ce problème est d'étudier l'écoulement stratifié dans une conduite horizontale, et ses conditions de stabilité afin de retrouver les résultats sur lesquels Taitel & Dukler (1976) s'appuient pour modéliser les transitions de régime d'écoulement diphasique en conduite horizontale. De plus, le modèle utilisé permet de calculer de façon directe la perte de pression par frottement d'un écoulement stratifié que l'on comparera à l'approche empirique de Lockhart et Martinelli. La description détaillée des modèles de transition entre régimes d'écoulement pour des conduites d'inclinaison arbitraire est détaillée par Dukler & Taitel (1986).

On considère un écoulement stratifié horizontal d'eau et d'air dans une conduite circulaire de diamètre, D , et de rayon, R , dont l'aire de la section droite est notée A . On notera, A_G , l'aire de la section droite de la conduite occupée par le gaz et, A_L , celle occupée par le liquide (voir figure F.1). L'écoulement est isotherme, $T = 20^\circ\text{C}$, et il n'y a pas de changement de phase.

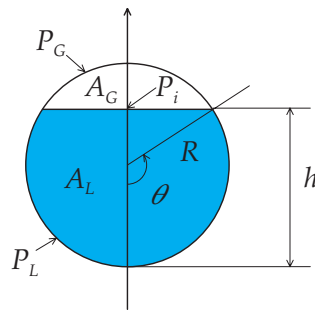


Figure F.1: Coupe de la conduite horizontale considérée dans ce problème.

5.1 bilans de masse

Les bilans de masse moyennés sur la section de la conduite, s'expriment dans le cas où l'on ne considère pas le changement de phase par,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k v_k \rangle_2 = 0 \quad (\text{F.1})$$

$$(\text{F.2})$$

où l'indice k est relatif à la phase considérée, ρ est la masse volumique et v est la composante de la vitesse le long de l'axe Oz .

5.2 Bilans de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement projeté sur l'axe Oz , de direction \mathbf{e}_z , obtenu en négligeant la variation longitudinale des contraintes visqueuses s'exprime par,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k v_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k v_k^2 \rangle_2 = - \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle p_k \rangle_2 + \\ \int_C \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k} \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

où C et C_k représentent respectivement l'intersection de l'interface et de la partie de la conduite mouillée par la phase k avec le plan d'abscisse z (voir figure F.1). On notera que l'écoulement étant horizontal, les forces de volume ne s'expriment pas selon la direction horizontale \mathbf{e}_z . Les deux premiers termes représentent l'accélération du fluide, le suivant correspond à l'effet du gradient de pression sur l'écoulement, et les deux derniers représentent l'effet des contraintes appliquées sur l'interface et la fraction de la conduite mouillée par la phase considérée.

5.3 Application de la forme limite du théorème de Gauss

La forme limite du théorème de Gauss pour une section de conduite s'écrit pour tout vecteur \mathbf{B} , en considérant que A_k est limitée par la courbe $C \cup C_k$,

$$\int_{A_k(z,t)} \nabla \cdot \mathbf{B} dS = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z,t)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z dS + \int_{C(z,t)} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k} dl + \int_{C_k(z,t)} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k} dl. \quad (\text{F.4})$$

En appliquant cette identité au vecteur $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z$, on obtient,

$$\int_{A_k(z,t)} \nabla \cdot \mathbf{e}_z dS = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k(z,t)} dS + \int_{C(z,t)} \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k} dl + \int_{C_k(z,t)} \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k} dl. \quad (\text{F.5})$$

Compte tenu que sur la fraction de la conduite mouillée par la phase k , C_k , $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_k = 0$ et que \mathbf{e}_z est uniforme sur la section, le premier et le dernier terme de (F.5) sont nuls et on obtient la relation demandée,

$$\frac{\partial A_k}{\partial z} + \int_{C(z,t)} \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_k}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k} dl = 0 \quad (\text{F.6})$$

5.4 Simplification des bilans de quantité de mouvement

On rappelle que le tenseur des contraintes se décompose en,

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{U} + \mathbb{V} \quad (\text{F.7})$$

où \mathbb{U} est le tenseur unité et \mathbb{V} est la partie visqueuse du tenseur des contraintes. Le terme d'interaction à l'interface devient, compte tenu de cette décomposition et de l'uniformité de la pression et de la contrainte de cisaillement sur l'interface,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} &= - \int_C \mathbf{e}_z \cdot p_k \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_C \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \\ &= -p_{ki} \int_C \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \langle \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k) \rangle_i \int_C dl \\ &= p_{ki} \frac{\partial A_k}{\partial z} + \tau_{ki} P_i. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

où p_{ki} et τ_{ki} représentent respectivement la pression et la contrainte visqueuse à l'interface et P_i le périmètre de l'interface. Un calcul analogue donne pour le terme d'interaction avec la paroi, compte tenu que sur la paroi, $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}_k = 0$,

$$\int_{C_k} \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = \langle \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k) \rangle_w \int_{C_k} dl = \tau_{kw} P_k. \quad (\text{F.9})$$

où τ_{kw} représente la contrainte visqueuse appliquée par la paroi sur la phase k qui mouille la conduite sur une longueur P_k . En prenant en compte (F.8), (F.9) le bilan de quantité de mouvement (F.3) devient,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k v_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k v_k^2 \rangle_2 = - \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle p_k \rangle_2 + p_{ki} \frac{\partial A_k}{\partial z} + \tau_{ki} P_i + \tau_{kw} P_k \quad (\text{F.10})$$

5.5 Etude de l'écoulement permanent et établi

En écoulement établi et permanent, les deux bilans de quantité de mouvement deviennent,

$$A_L \frac{d}{dz} \langle p_L \rangle_2 = \tau_{Li} P_i + \tau_{Lw} P_L \quad (\text{F.11})$$

$$A_G \frac{d}{dz} \langle p_G \rangle_2 = \tau_{Gi} P_i + \tau_{Gw} P_G \quad (\text{F.12})$$

En sommant les deux équations, on obtient compte tenu que le bilan de quantité de mouvement à l'interface projeté sur la direction \mathbf{e}_z exprime l'équilibre de l'interface, $\tau_{Li} + \tau_{Gi} = 0$,

$$A \frac{d}{dz} \langle p \rangle_2 = \tau_{Lw} P_L + \tau_{Gw} P_G. \quad (\text{F.13})$$

En écoulement établi, les gradients de pression dans chaque phase doivent être égaux. En conséquence, en éliminant le gradient de pression des deux équations (F.11) et (F.12), on obtient l'équation d'équilibre de l'interface,

$$\tau_{Li} P_i \left(\frac{1}{A_L} + \frac{1}{A_G} \right) + \frac{\tau_{Lw} P_L}{A_L} - \frac{\tau_{Gw} P_G}{A_G} = 0. \quad (\text{F.14})$$

5.6 Calcul du niveau de liquide

Pour résoudre l'équation (F.14) on procède comme Taitel & Dukler (1976). On considère que le frottement du liquide et du gaz sur la paroi est décrit par la corrélation de Blasius que l'on écrira sous la forme,

$$f = C_f Re^{-n} \quad (\text{F.15})$$

où f est coefficient de frottement, Re est le nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne de la phase considérée et le diamètre hydraulique et $C_f = 0,046$ et $n = 0,2$. On considère, de plus, que le frottement du gaz sur la paroi et sur la conduite sont proches et que l'on peut les confondre. Pour évaluer le diamètre hydraulique coté gaz, on considère que la paroi et l'interface contribuent de façon égale tandis que pour le liquide, seule la paroi contribue significativement au frottement. En conséquence on prendra,

$$D_G = \frac{4A_G}{P_G + P_i} \quad (\text{F.16})$$

$$D_L = \frac{4A_L}{P_L} \quad (\text{F.17})$$

Ces choix sont faciles à justifier et présentent de plus l'avantage de faciliter les calculs. En effet, il serait logique de considérer que l'échelle de vitesse associée au frottement interfacial est $v_G - v_L$. Or, en écoulement stratifié, et notamment au voisinage de l'instabilité, $v_G \gg v_L$ si bien que $v_G - v_L \approx v_G$. Dans ces conditions, les différents termes de frottement peuvent s'écrire,

$$\tau_{Lw} = -\frac{1}{2} f_L \rho_L v_L^2, \quad Re_L = \frac{\rho_L v_L D_L}{\mu_L} \quad (\text{F.18})$$

$$\tau_{Gw} = -\frac{1}{2} f_G \rho_G v_G^2, \quad Re_G = \frac{\rho_G v_G D_G}{\mu_G} \quad (\text{F.19})$$

$$(\text{F.20})$$

où l'on note que selon la direction du mouvement, le frottement à la paroi est résistant. Pour le frottement à l'interface, on notera que selon les hypothèses de Taitel & Dukler (1976), le gaz frotte sur le liquide comme sur la paroi, et qu'en raison de l'équilibre de l'interface, on a,

$$\tau_{Gi} = \tau_{Gw} = -\tau_{Li} \quad (\text{F.21})$$

L'équation d'équilibre (F.14) se simplifie dans ces conditions et devient,

$$\tau_{Lw} \frac{P_L}{A_L} - \tau_{Gw} \left(\frac{P_G}{A_G} + \frac{P_i}{A_L} + \frac{P_i}{A_G} \right) = 0. \quad (\text{F.22})$$

Pour faire apparaître la perte de pression en liquide ou gaz seul, il faut introduire la vitesse débitante, J_k . En vertu du bilan de masse, on a,

$$v_k = J_k \frac{A}{A_k}. \quad (\text{F.23})$$

La perte de pression obtenue lorsque la phase est seule en présence dans la conduite est donnée par,

$$\left(\frac{dP}{dz} \right)_{kS} = -\frac{4}{D} \frac{1}{2} \rho_k J_k^2 C_f Re_{kS}^{-n}, \quad Re_{kS} = \frac{\rho_L J_L D}{\mu_L} \quad (\text{F.24})$$

où le coefficient de frottement est évalué avec le nombre de Reynolds monophasique correspondant, Re_{kS} . En mettant en facteur le frottement monophasique dans la contrainte visqueuse et en utilisant le bilan de masse (F.23), on obtient,

$$\tau_{kw} = -\frac{1}{2} C_f \rho_k J_k^2 Re_{kS}^{-n} \left(\frac{D_k}{D} \right)^{-n} \left(\frac{A}{A_k} \right)^{2-n} \quad (\text{F.25})$$

En reportant ces expressions dans l'équation d'équilibre (F.22) et en divisant par le frottement en gaz seul, on obtient,

$$X^2 \frac{P_L}{A_L} \left(\frac{D_L}{D} \right)^{-n} \left(\frac{A}{A_L} \right)^{2-n} - \left(\frac{P_G}{A_G} + \frac{P_i}{A_L} + \frac{P_i}{A_G} \right) \left(\frac{D_G}{D} \right)^{-n} \left(\frac{A}{A_G} \right)^{2-n} \quad (\text{F.26})$$

qui est bien de la forme,

$$X^2 f(A, D, A_L, P_L, D_L) - g(A, D, A_G, P_G, D_G, P_i) = 0 \quad (\text{F.27})$$

Le facteur X^2 est le rapport des deux contraintes de cisaillement en liquide et gaz seul qui sont respectivement égales au facteur commun $(4/D)$ près aux pertes de pression par frottement correspondantes,

$$X^2 = \frac{\frac{1}{2} C_f \rho_L J_L^2 Re_{LS}^{-n}}{\frac{1}{2} C_f \rho_G J_G^2 Re_{GS}^{-n}} = \left| \frac{(dP/dz)_{LS}}{(dP/dz)_{GS}} \right|. \quad (\text{F.28})$$

L'avantage de la forme (F.27) de l'équation d'équilibre est que toutes les conditions d'écoulement et les propriétés physiques sont regroupées dans un seul facteur, X^2 et que les autres facteurs en sont indépendants et ne dépendent que de la hauteur de liquide sans dimension, h/D . En choisissant D comme échelle de longueur et en s'aidant de la figure F.1 on note

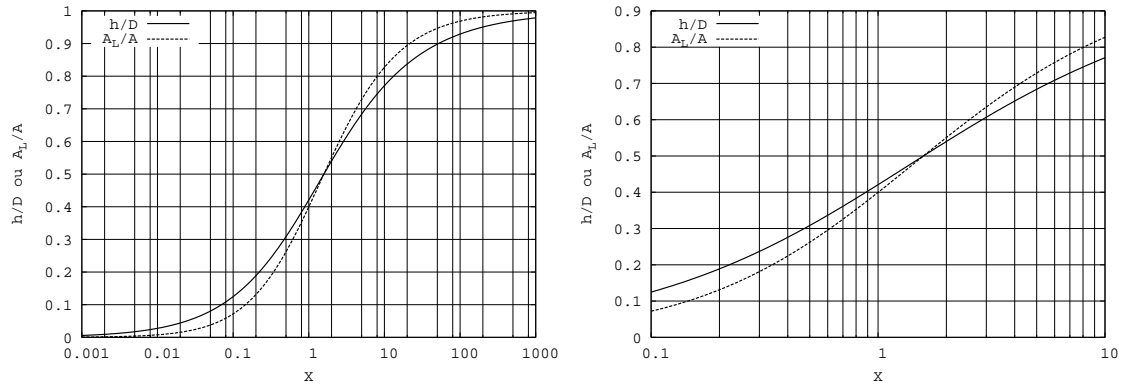


Figure F.2: Solutions de l'équation d'équilibre (F.27). X est le paramètre de Lockhart Martinelli.

les relations suivantes,

$$\theta = \arccos \left(1 - \frac{2h}{D} \right) \quad (\text{F.29})$$

$$A_L = \frac{D^2}{4} \left(\theta + \left(\frac{2h}{D} - 1 \right) \sin \theta \right) \quad (\text{F.30})$$

$$A_G = \frac{D^2}{4} \left(\pi - \theta - \left(\frac{2h}{D} - 1 \right) \sin \theta \right) \quad (\text{F.31})$$

$$P_L = D\theta \quad (\text{F.32})$$

$$P_L = D(\pi - \theta) \quad (\text{F.33})$$

$$P_i = D \sin \theta \quad (\text{F.34})$$

$$D_L = \frac{4A_L}{P_L} \quad (\text{F.35})$$

$$D_G = \frac{4A_G}{P_G + P_i} \quad (\text{F.36})$$

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 \quad (\text{F.37})$$

En reportant ces relations dans l'équation d'équilibre, on observe que f et g ne sont fonction que de h/D . Pour chaque valeur de X on peut résoudre l'équation obtenue par dichotomie et on obtient les résultats consignés à la figure F.2.

5.7 Application numérique

On considère un écoulement d'eau et d'air dans une conduite de 5,1 cm de diamètre. On considère les propriétés physiques suivantes pour l'eau,

$$\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3, \mu_L = 10^{-3} \text{ Pa s}, \quad (\text{F.38})$$

et pour l'air,

$$\rho_L = 1,20 \text{ kg/m}^3, \mu_L = 18 \cdot 10^{-6} \text{ Pa s}. \quad (\text{F.39})$$

On considère de plus les débits suivants,

$$J_L = 0,1 \text{ m/s}, J_G = 2 \text{ m/s}. \quad (\text{F.40})$$

Le titre massique de gaz a pour définition,

$$x \triangleq \frac{M_G}{M_G + M_L} \quad (\text{F.41})$$

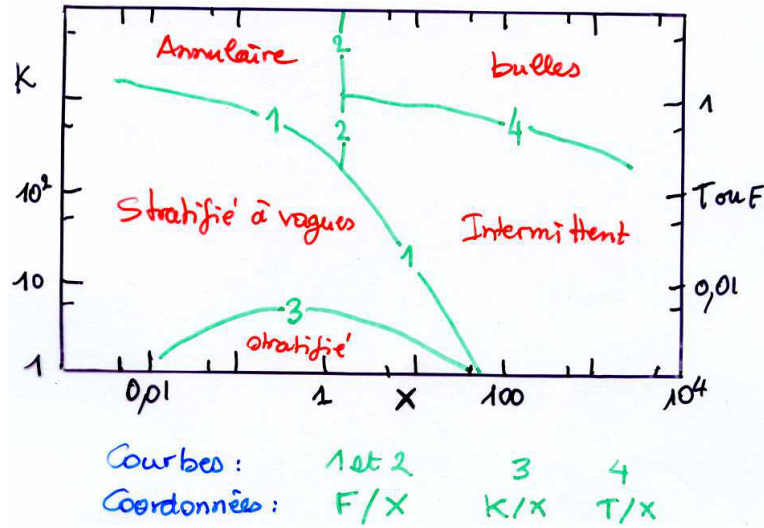


Figure F.3: Carte d'écoulement de Taitel & Dukler (1976) en variables sans dimensions.

où M est le débit massique de chaque phase. Par définition du titre, et en appelant $M = M_G + M_L$ le débit massique total, on a

$$M_G = xM, \quad M_L = (1 - x)M \quad (\text{F.42})$$

et en conséquence, on peut exprimer les vitesses débitantes en fonction du titre et du débit masse total selon,

$$J_L = \frac{(1 - x)M}{A\rho_L}, \quad J_G = \frac{xM}{A\rho_G} \quad (\text{F.43})$$

En reportant ces expressions dans la définition des pertes de pression par frottement (F.24) et en effectuant le rapport on obtient,

$$X^2 = \left(\frac{\mu_L}{\mu_G} \right)^n \left(\frac{1 - x}{x} \right)^{2-n} \left(\frac{\rho_G}{\rho_L} \right) \quad (\text{F.44})$$

et avec $n = 0, 2$ on obtient,

$$X = \left(\frac{\mu_L}{\mu_G} \right)^{0,1} \left(\frac{1 - x}{x} \right)^{0,9} \left(\frac{\rho_G}{\rho_L} \right)^{0,5} \quad (\text{F.45})$$

Avec les valeurs numériques données plus haut, on obtient,

$$M_L = 0,204 \text{ kg/s}, \quad M_G = 4,90 \text{ g/s} \quad (\text{F.46})$$

$$x = 0,0234, \quad X = 1,486 \quad (\text{F.47})$$

$$Re_{LS} = 5100, \quad Re_{GS} = 6800 \quad (\text{F.48})$$

$$f_{LS} = 8,34 \cdot 10^{-3}, \quad f_{GS} = 7,88 \cdot 10^{-3} \quad (\text{F.49})$$

$$\left(\frac{dP}{dz} \right)_{LS} = 3,27 \text{ Pa/m}, \quad \left(\frac{dP}{dz} \right)_{GS} = 1,48 \text{ Pa/m} \quad (\text{F.50})$$

Pour estimer les conditions d'écoulement et vérifier le caractère stratifié de l'écoulement, il faut utiliser la carte d'écoulement de Taitel & Dukler (1976). Le caractère stratifié de

l'écoulement est déterminé par la frontière numéro 1 de la figure F.3. Les paramètres sans dimension à prendre en compte sont X et F défini par,

$$F^2 \triangleq \frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G} \frac{J_G}{Dg} \quad (\text{F.51})$$

L'application numérique donne

$$X = 1,485, \quad F = 0,098, \quad (\text{F.52})$$

qui montre sur le graphe représenté à la figure F.3 que l'on est en écoulement stratifié. La vitesse de gaz n'est pas suffisante pour déclencher l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Par ailleurs pour déterminer si l'écoulement est lisse ou à vagues, il faut examiner la position du point de fonctionnement relativement à la courbe numéro 3 ce qui requiert de calculer les nombres sans dimension X et K qui est défini par,

$$K^2 \triangleq \frac{\rho_G J_G^2 J_L}{(\rho_L - \rho_G) g \nu_L}, \quad (\text{F.53})$$

où $\nu_L = \mu_L / \rho_L$ est la viscosité cinématique du liquide. L'application numérique donne,

$$X = 1,485, \quad K = 7,0, \quad (\text{F.54})$$

Ces coordonnées sont au dessus de la courbe 3 ce qui signifie que la vitesse du gaz est suffisante pour engendrer des vagues sur la surface libre. L'écoulement est donc stratifié à vagues.

Pour déterminer la hauteur d'équilibre de l'écoulement stratifié, il suffit de résoudre l'équation d'équilibre (F.26), numériquement ou en s'aidant de la figure F.2. On obtient,

$$X = 1,485, \quad \frac{h}{D} = 0,489, \quad \alpha_L = 0,486 \quad (\text{F.55})$$

Pour déterminer la perte de pression par frottement de l'écoulement diphasique, on fait apparaître dans l'équation (F.13) les pertes de pression en gaz et liquide seuls comme pour l'équation d'équilibre. On obtient le résultat suivant,

$$\left(\frac{dP}{dz} \right) = \left(\frac{dP}{dz} \right)_{LS} \left(\frac{D_L}{D} \right)^{-n} \left(\frac{A}{A_L} \right)^{2-n} \frac{P_L D}{4A} + \left(\frac{dP}{dz} \right)_{GS} \left(\frac{D_G}{D} \right)^{-n} \left(\frac{A}{A_G} \right)^{2-n} \frac{P_G D}{4A} \quad (\text{F.56})$$

qui est bien de la forme,

$$\left(\frac{dP}{dz} \right) = \left(\frac{dP}{dz} \right)_{LS} h(A, D, A_L, D_L, P_L) + \left(\frac{dP}{dz} \right)_{GS} k(A, D, A_G, D_G, P_G) \quad (\text{F.57})$$

La figure F.4 donne l'évolution des fonctions h et k en fonction de X . Le calcul fournit,

$$X = 1,486, \quad h = 1,813, \quad k = 1,846 \quad (\text{F.58})$$

ce qui donne la valeur de la perte de pression,

$$\left(\frac{dP}{dz} \right) = -8,67 \text{ Pa/m} \quad (\text{F.59})$$

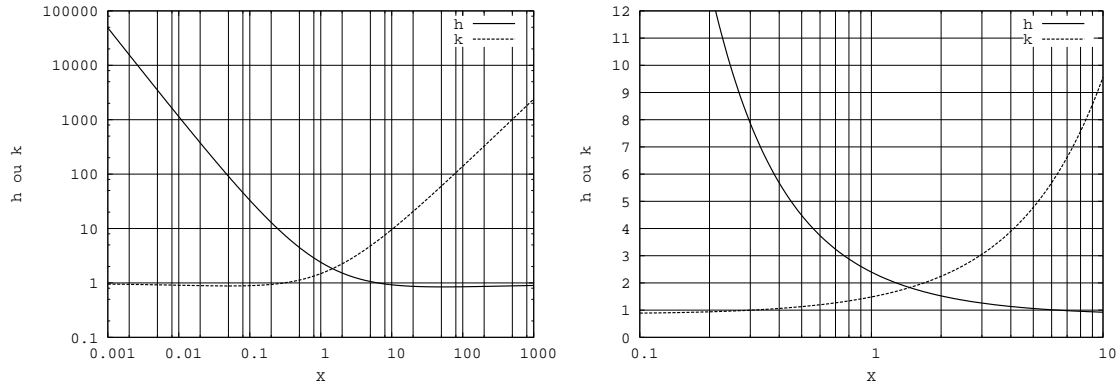


Figure F.4: Evolution des facteurs h et k de l'équation déterminant les pertes de pression. X est le paramètre de Lockhart Martinelli.

5.8 Méthode de Lockhart et Martinelli

Le paramètre de Lockhart et Martinelli est la variable sans dimension également utilisée par ces auteurs. On rappelle que dans ce cas, le taux de liquide se calcule par,

$$\frac{A_L}{A} = \alpha_L = \frac{X}{\sqrt{X^2 + 20X + 1}}, \quad (\text{F.60})$$

et que la perte de pression rapportée à la perte de pression monophasique liquide s'obtient par,

$$\Phi_L^2 \triangleq \left| \frac{\frac{dP}{dz}}{\left(\frac{dP}{dz}\right)_{LS}} \right| = 1 + \frac{20}{X} + \frac{1}{X^2}. \quad (\text{F.61})$$

L'application numérique donne,

$$X = 1,486, \quad \alpha_L = 0,259, \quad \Phi_L^2 = 14,9 \quad (\text{F.62})$$

ce qui fournit une valeur de perte de pression,

$$\left(\frac{dP}{dz} \right) = -48,8 \text{ Pa/m}. \quad (\text{F.63})$$

On observe que les corrélations de Lockhart et Martinelli prédisent un taux de liquide notablement plus faible et un frottement 5 fois plus important que le modèle de Taitel & Dukler (1976). On notera que dans ce dernier modèle, on considère que le frottement à l'interface est décrit par une corrélation relative à un écoulement sur une conduite lisse (Blasius) ce qui en raison du caractère probable de l'écoulement, stratifié à vagues, sous-estime fortement le frottement interfacial. En conséquence, il est normal de trouver un écoulement liquide moins cisailé, possédant une hauteur de liquide plus importante et une perte de pression moins importante. Ne disposant pas d'information sur l'incertitude liée aux corrélations de Lockhart et Martinelli, il est difficile de trancher définitivement en faveur du résultat qu'elles produisent. Toutefois, les prédictions des deux modèles sont cohérentes. Il faut noter qu'initialement, Taitel & Dukler (1976) ne cherchent pas à déterminer la perte de pression mais plutôt la hauteur de liquide. La discussion des différentes transitions est basée sur cette dernière quantité et notamment sa valeur par rapport à $h/D = \frac{1}{2}$.

5.9 Etude de l'écoulement stratifié instationnaire

Dans l'approximation monodimensionnelle, on pose $\langle v_k \rangle_2 = U_k$ et $\langle v_k^2 \rangle_2 = U_k^2$, on suppose de plus que la répartition de pression selon la verticale est hydrostatique et on néglige le saut de

pression à l'interface ($p_{Li} = p_{Gi}$). On suppose également que l'écoulement est incompressible. Les bilans de masse s'écrivent en absence de changement de phase,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k v_k >_2 = 0. \quad (\text{F.64})$$

Avec l'approximation monodimensionnelle, on a,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k \rho_k + \frac{\partial}{\partial z} A_k \rho_k U_k = 0. \quad (\text{F.65})$$

En prenant le caractère incompressible des phases en compte et en développant le terme spatial, on obtient de plus,

$$\rho_k \frac{\partial A_k}{\partial t} + \rho_k A_k \frac{\partial U_k}{\partial z} + \rho_k U_k \frac{\partial A_k}{\partial z} = 0. \quad (\text{F.66})$$

Les bilans de quantité de mouvement (F.10) s'écrivent dans l'approximation monodimensionnelle,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k \rho_k U_k + \frac{\partial}{\partial z} A_k \rho_k U_k^2 = -\frac{\partial}{\partial z} A_k < p_k >_2 + p_{ki} \frac{\partial A_k}{\partial z} + \tau_{ki} P_i + \tau_{kw} P_k. \quad (\text{F.67})$$

En soustrayant de cette équation le bilan de masse (F.65) au préalable multiplié par U_k , on obtient,

$$A_k \rho_k \frac{\partial U_k}{\partial t} + A_k \rho_k U_k \frac{\partial U_k}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} A_k < p_k >_2 + p_{ki} \frac{\partial A_k}{\partial z} + \tau_{ki} P_i + \tau_{kw} P_k. \quad (\text{F.68})$$

En prenant en compte le caractère hydrostatique de la pression, on a les relations suivantes entre les différentes valeurs de la pression intervenant dans les équations de quantité de mouvement (F.67),

$$p_{Li} = p_{Gi}, \quad (\text{F.69})$$

$$< p_L >_2 = p_{Li} + \frac{1}{2} \rho_L h, \quad (\text{F.70})$$

$$< p_G >_2 = p_{Gi} - \frac{1}{2} \rho_G (D - h). \quad (\text{F.71})$$

En ne gardant comme variable que la pression moyenne dans le liquide que l'on appellera p , on obtient,

$$< p_L >_2 = p, \quad (\text{F.72})$$

$$< p_G >_2 = p - \frac{1}{2} (\rho_L - \rho_G) gh - \frac{1}{2} \rho_G D, \quad (\text{F.73})$$

$$p_{Li} = p_{Gi} = p - \frac{1}{2} \rho_L gh. \quad (\text{F.74})$$

En reportant ces relations dans les bilans de quantité de mouvement (F.68), on obtient,

$$A_L \rho_L \frac{\partial U_L}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_L h A'_L \frac{\partial h}{\partial z} + A_L \rho_L U_L \frac{\partial U_L}{\partial z} + A_L \frac{\partial p}{\partial z} = \tau_{Li} P_i + \tau_{Lw} P_L, \quad (\text{F.75})$$

$$\begin{aligned} A_G \rho_G \frac{\partial U_G}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} A'_L \rho_G g (D - h) - \frac{1}{2} A_G (\rho_L - \rho_G) g \right) \frac{\partial h}{\partial z} \\ + A_G \rho_G U_G \frac{\partial U_G}{\partial z} + A_G \frac{\partial p}{\partial z} = -\tau_{Li} P_i + \tau_{Gw} P_G. \end{aligned} \quad (\text{F.76})$$

Le système formé des deux équations de masse (F.66) et des deux équations de bilan de quantité de mouvement (F.75) et (F.76) se mettent sous la forme matricielle suivante,

$$\mathbb{A} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{B} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} = \mathbf{C}, \quad (\text{F.77})$$

où les matrices \mathbb{A} , \mathbb{B} et \mathbf{C} sont données par,

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \rho_L A'_L & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_G A'_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_L \rho_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_G \rho_G & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.78})$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \rho_L A'_L U_L & \rho_L A_L & 0 & 0 \\ -\rho_G A'_L U_G & 0 & \rho_G A_G & 0 \\ \frac{1}{2} \rho_L g h A'_L & A_L \rho_L U_L & 0 & A_L \\ -\frac{1}{2} A_G \rho_L^* g A_G & 0 & A_G \rho_G U_G & A_G \end{pmatrix} \quad (\text{F.79})$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} h \\ U_L \\ U_G \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{Li} P_i + \tau_{Lw} P_L \\ -\tau_{Li} P_i + \tau_{Gw} P_G \end{pmatrix} \quad (\text{F.80})$$

et où, A'_L représente la dérivée de A_L par rapport à h , la hauteur de liquide. Pour des facilités d'écriture, on a noté,

$$-\frac{1}{2} A_G \rho_L^* g A_G = \frac{1}{2} A'_L \rho_G g (D - h) - \frac{1}{2} A_G (\rho_L - \rho_G) g. \quad (\text{F.81})$$

L'analyse de stabilité consiste à étudier le devenir d'une perturbation imposée au système autour d'un état permanent et établi. Il existe deux points de vue distincts.

- *L'analyse de la stabilité temporelle*, où l'on étudie l'influence de la perturbation d'une condition aux limites, sa propagation et son éventuelle amplification dans le système. Dans ce cas, la décomposition en série de Fourier temporelle de la condition aux limites variable fournit un certain nombre de mode temporels de pulsation, ω , réelle et connue.
- *L'analyse de stabilité spatiale*, où l'on écarte de système de sa position d'équilibre à l'instant initial et on étudie le retour à l'équilibre où l'éventuelle amplification de la perturbation initiale. Dans ce cas, la décomposition en série de Fourier spatiale de la perturbation initiale fournit un certain nombre de mode spatiaux de nombre d'onde, k , connu et réel.

Nous allons considérer la stabilité spatiale. Soit, \mathbf{X}_0 la solution permanente dont on recherche la stabilité. Pour étudier les états proches de \mathbf{X}_0 , on recherche les solutions sous la forme d'un développement limité en ϵ , un petit paramètre sans dimension, qui dans notre cas peut être lié à l'amplitude, ϵD , de la perturbation de la position surface libre. La perturbation est petite ce qui signifie,

$$\epsilon \ll 1 \quad (\text{F.82})$$

La méthode de perturbation (Van Dyke, 1975) consiste à rechercher la solution du système complet (F.77) sous la forme,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 + \dots \quad (\text{F.83})$$

Pour l'analyse de stabilité dite linéaire, un seul terme du développement suffit.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{F.84})$$

On reporte cette forme dans l'équation d'évolution du système (F.77) en utilisant autant que nécessaire la formule de Taylor pour développer chacun des termes. On obtient une expression que l'on peut mettre sous la forme d'un polynôme en ϵ que l'on tronquera au premier ordre,

$$E_0(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}'_{0z}, \mathbf{X}'_{0t}, \dots) + \epsilon E_1(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}'_{0z}, \mathbf{X}'_{0t}, \dots) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \quad (\text{F.85})$$

Cette équation devant être vérifiée pour toute valeur de ϵ , chaque coefficient de ϵ doit être nul, ce qui fournit les équations d'évolution de différents *ordres* de la solution, \mathbf{X}_0 , \mathbf{X}_1 , etc. Lorsque l'on applique cette procédure à l'équation d'évolution de notre système (F.77), on obtient les équations suivantes,

$$\mathbb{A} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial t} + \mathbb{B} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial z} = \mathbf{C}, \quad (\text{F.86})$$

$$\mathbb{A}(\mathbf{X}_0) \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial t} + \mathbb{B}(\mathbf{X}_0) \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial z} = \mathbb{D} \mathbf{X}_1, \quad (\text{F.87})$$

où \mathbb{D} représente l'effet de l'évolution du frottement et de la solution permanente sous l'effet de la perturbation. C'est un terme linéaire en \mathbf{X}_1 qui s'exprime par,

$$\mathbb{D} \mathbf{X}_1 = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial z} \mathbf{X}_1 - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X}_1 \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial t} - \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X}_1 \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial z}, \quad (\text{F.88})$$

où les dérivées en \mathbf{X} sont évaluées en \mathbf{X}_0 . L'équation (F.86) donne l'évolution de l'ordre zéro de la solution, c'est la *solution de base* qui représente simplement l'écoulement permanent étudié précédemment. L'équation (F.87) donne l'évolution de la solution d'ordre 1. C'est un système différentiel linéaire dont on va chercher la solution sous la forme d'ondes progressives,

$$\mathbf{X}_1 = \hat{\mathbf{X}}_1 \exp(i\omega t - ikx), \quad (\text{F.89})$$

où $\hat{\mathbf{X}}_1$ est l'amplitude complexe de l'onde. En reportant dans l'équation (F.87), on obtient,

$$(i\omega \mathbb{A}(\mathbf{X}_0) - ik \mathbb{B}(\mathbf{X}_0) - \mathbb{D}) \hat{\mathbf{X}}_1 = 0. \quad (\text{F.90})$$

En divisant par ik , on trouve,

$$\left(c \mathbb{A}(\mathbf{X}_0) - \mathbb{B}(\mathbf{X}_0) - \frac{1}{ik} \mathbb{D} \right) \hat{\mathbf{X}}_1 = 0, \quad (\text{F.91})$$

où la vitesse de propagation de l'onde c est donnée par,

$$c \triangleq \frac{\omega}{k}. \quad (\text{F.92})$$

L'approximation des ondes longues, $\lambda = 2\pi/k \gg 1$ permet d'apporter une simplification. En effet, dans la limite où $\lambda \rightarrow \infty$, c'est-à-dire, $k \rightarrow 0$, le système devient,

$$(c \mathbb{A}(\mathbf{X}_0) - \mathbb{B}(\mathbf{X}_0)) \hat{\mathbf{X}}_1 = 0. \quad (\text{F.93})$$

Dans cette approximation, les perturbations du frottement (\mathbf{C}) et le couplage avec la solution de base disparaissent mais l'équation pour l'amplitude complexe de l'onde, $\hat{\mathbf{X}}_1$ reste linéaire et homogène. Ses solutions sont définies à une constante multiplicative près et appartiennent au noyau de $(c \mathbb{A}(\mathbf{X}_0) - \mathbb{B}(\mathbf{X}_0))$. Ce noyau est différent 0 si et seulement si,

$$\Delta = \det(\mathbb{B}(\mathbf{X}_0) - c \mathbb{A}(\mathbf{X}_0)) = 0 \quad (\text{F.94})$$

Dans l'analyse de stabilité linéaire k est donné et réel, et les valeurs de c , solutions de cette équation fournissent les valeurs de la pulsation ω qui est *a priori* complexe. On appelle cette équation la relation de dispersion du système car elle exprime la relation entre la vitesse de propagation et la longueur d'onde. Une onde composée initialement de plusieurs modes spatiaux se dispersera si leur vitesse de propagation dépend de la longueur d'onde.

Les coefficients de (F.94) étant réels, les solutions complexes, si elles existent sont conjuguées. Dans ce cas, l'une d'entre elle possède une partie imaginaire négative et \mathbf{X}_1 n'est pas borné en temps (voir équation F.89). La solution du système est alors instable. Pour que le

système soit stable, il faut que la relation de dispersion (F.94) ne possède que des racines réelles. Dans notre cas particulier, elles correspondent à des ondes se propageant à vitesse constante, c , sans déformation ni amortissement.

En utilisant les expressions (F.78) et (F.79), la relation de dispersion s'écrit,

$$\Delta = \left(\rho_L A_G A'_L (U_L - c)^2 - \frac{1}{2} \rho_L^* A_L A_G g + \frac{1}{2} \rho_L A_G A'_L g h + \rho_G A_L A'_L (U_G - c)^2 \right) \quad (\text{F.95})$$

La forme de la solution de ce problème en 2D (canal de section rectangulaire) suggère de regrouper le deuxième et troisième terme sous la forme suivante,

$$-\frac{1}{2} \rho_L^* A_L A_G g + \frac{1}{2} \rho_L A_G A'_L g h = C_1 (\rho_G - \rho_L) g A_G A_L, \quad (\text{F.96})$$

avec,

$$2C_1 = 1 + \frac{A'_L (\rho_G A_L (D - h) - \rho_L A_G h)}{(\rho_G - \rho_L) A_G A_L}. \quad (\text{F.97})$$

On remarquera que pour un canal de section rectangulaire de largeur L et hauteur D , on a $A_L = hL$, $A_G = L(D - h)$, $A'_L = L$ et par conséquent, $C_1 = 1$. La relation de dispersion devient,

$$\Delta = -\rho_L \rho_G A_G A_L (\rho_L A_G A'_L (U_L - c)^2 + C_1 (\rho_G - \rho_L) g A_G A_L + \rho_G A_L A'_L (U_G - c)^2) = 0, \quad (\text{F.98})$$

qui est un polynôme du second degré en c ,

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{\rho_L \rho_G A_G A_L} &= c^2 (\rho_L A_G A'_L + \rho_G A_L A'_L) - 2c (\rho_L A_G A'_L U_L + \rho_G A_L A'_L U_G) \\ &\quad + C_1 A_L A_G (\rho_G - \rho_L) g + \rho_L A_G A'_L U_L^2 + \rho_G A_L A'_L U_G^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.99})$$

Pour que les racines de ce polynôme soient réelles (stabilité), il faut que son discriminant soit positif. Le discriminant réduit vaut,

$$\delta' = \rho_L \rho_G A_L A_G A_L'^2 (U_G - U_L)^2 - C_1 A_G A_L A'_L (\rho_L A_G + \rho_G A_L) (\rho_L - \rho_G) g. \quad (\text{F.100})$$

La condition de stabilité du système est donc,

$$(U_G - U_L)^2 \geq C_1 (\rho_L - \rho_G) g \frac{\rho_L A_G + \rho_G A_L}{\rho_L \rho_G A'_L}. \quad (\text{F.101})$$

Pour un canal de section rectangulaire, on retrouve le résultat connu,

$$(U_G - U_L)^2 \geq (\rho_L - \rho_G) g \frac{\rho_L (D - h) + \rho_G h}{\rho_L \rho_G}. \quad (\text{F.102})$$

La relation (F.101) indique que lorsque la différence de vitesse entre phases dépasse une certaine vitesse critique donnée par,

$$v_{crit}^2 = C_1 (\rho_L - \rho_G) \frac{\rho_L A_G + \rho_G A_L}{\rho_L \rho_G A'_L}, \quad (\text{F.103})$$

le système devient instable, l'effet d'aspiration induit par l'accélération du gaz dépassant l'effet de la gravité résultant de l'élévation de la vague. On peut introduire une vitesse critique sans dimension qui, dans la limite où $\rho_G \ll \rho_L$, est donnée par,

$$V_{crit}^2 \triangleq \frac{\rho_G v_{crit}^2}{(\rho_L - \rho_G) g} = C_1 \frac{A_G}{A'_L}, \quad (\text{F.104})$$

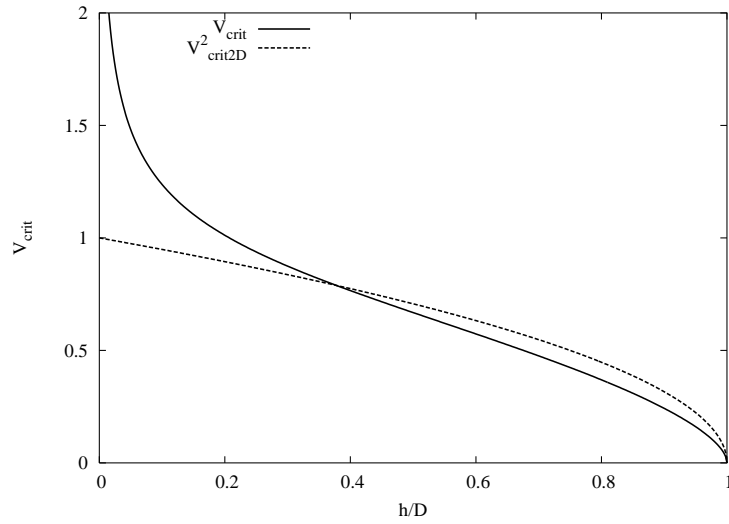


Figure F.5: Nombres de Froude critique de l'instabilité pour un canal de section circulaire (F.104) et de section rectangulaire (F.105)

et pour une conduite de section rectangulaire,

$$V_{crit2D}^2 \triangleq \frac{\rho_G v_{crit2D}^2}{(\rho_L - \rho_G)g} = 1 - \frac{h}{D}. \quad (\text{F.105})$$

La vitesse critique sans dimension possède la forme d'un nombre de Froude et s'interprète donc comme un nombre de Froude critique. Les relations (F.104) et (F.105) sont représentées à la figure F.5. On y observe que pour les faibles hauteurs de liquide, la section de la conduite s'évase ce qui améliore la stabilité par rapport au cas de la conduite de section rectangulaire. En revanche, pour des valeurs de la hauteur de liquide plus importantes, la conduite se resserre, ce qui dégrade la stabilité.

Pour les conditions d'écoulement étudiées ici, on obtient les valeurs numériques suivantes,

$$v_{crit} = 19.3 \text{ m/s}, \quad v_{crit2D} = 20.4 \text{ m/s}, \quad (\text{F.106})$$

ce qui montre que l'écoulement étudié ici est linéairement stable.

Devoir surveillé d'écoulements diphasiques du 21 mars 2005

Modalités

Le devoir comporte, d'une part, des questions de cours et, d'autre part, un problème. Tous les documents et moyens de calcul sont autorisés. On demande des réponses justifiées et concises qui peuvent éventuellement être accompagnées d'un croquis dont la légende sera bien explicitée. Il est inutile de détailler les développements analytiques pourvu que le passage d'une expression à la suivante soit expliqué avec soin.

1 Ebullition en vase

Décrire l'expérience de Nukiyama. Expliquer quels sont les différents paramètres contrôlés et mesurés. Indiquer sur la courbe d'ébullition les différents points remarquables et les différents mécanismes d'ébullition observés en les commentant brièvement.

2 Pertes de pression par frottement

Expliquer la méthode de calcul des pertes de pression de Lockart Martinelli. On devra notamment indiquer ce que l'on se donne et ce que la méthode permet de calculer. Il est inutile notamment de redémontrer l'expression du paramètre de Lockart-Martinelli.

3 Equations de bilan de mélange d'un écoulement diphasique

Par la suite, on considère les hypothèses de l'écoulement monodimensionnel. On notera ρ la masse volumique, w , la composante de la vitesse selon l'axe de la conduite, A , l'aire de la section de la conduite, P , la longueur de son périmètre, α , la fraction de la section de la conduite occupée par la phase vapeur, \mathbb{T} , le tenseur des contraintes, \mathbb{V} , la partie visqueuse du tenseur des contraintes, p , la pression, h , l'enthalpie, u , l'énergie interne et \mathbf{q} , le flux de chaleur.

3.1 Bilan de masse du mélange diphasique

Ecrire le bilan de masse de chaque phase moyenné dans la section de la conduite. Donner la signification physique de chaque terme. Expliquer comment on obtient l'équation de bilan de masse du mélange. Montrer qu'elle se met sous la forme suivante,

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho + \frac{\partial}{\partial z} A\rho w = 0. \quad (\text{F.1})$$

où on donnera la définition de la masse volumique du mélange et de la vitesse moyenne du mélange.

3.2 Bilan de quantité de mouvement du mélange diphasique

Ecrire le bilan de quantité de mouvement de chaque phase moyenné dans la section de la conduite et projeté sur son axe. Donner la signification physique de chaque terme. Expliquer comment on obtient l'équation de bilan de quantité de mouvement du mélange. Montrer qu'elle se met sous la forme suivante,

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho w + \frac{\partial}{\partial z} A(\alpha\rho_V w_V^2 + (1-\alpha)\rho_L w_L^2) = -A \frac{dp}{dz} - P\tau_w + A\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z. \quad (\text{F.2})$$

On indiquera sommairement les termes qu'il faut négliger pour obtenir cette équation.

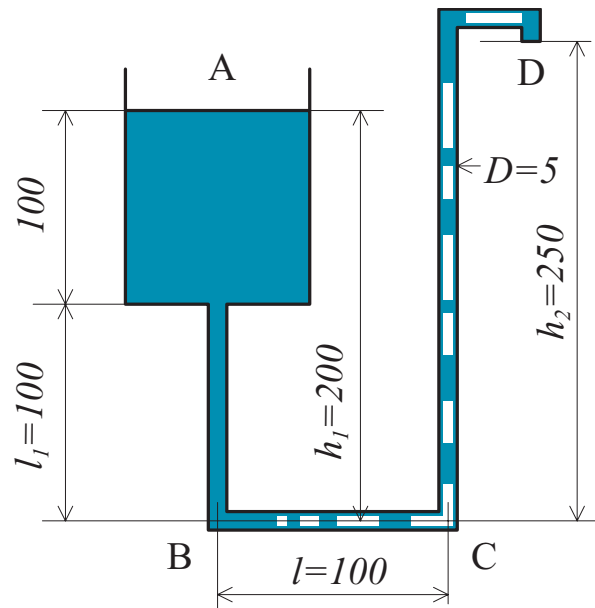


Figure F.1: Description schématique d'un thermosiphon diphasique. Toutes les cotes sont en millimètres.

3.3 Bilan de énergie totale du mélange diphasique

Ecrire le bilan d'énergie totale de chaque phase moyenné dans la section de la conduite. Donner la signification physique de chaque terme. Expliquer comment on obtient l'équation d'énergie totale du mélange. Montrer qu'elle se met sous la forme suivante,

$$\frac{\partial}{\partial t} A(\alpha \rho_V h_V + (1 - \alpha) \rho_L h_L) + A \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} M(x h_V + (1 - x) h_L) = P q. \quad (\text{F.3})$$

où M est le débit masse du mélange et x le titre massique du mélange. On indiquera sommairement les termes qu'il faut négliger.

4 Analyse du fonctionnement d'une thermosiphon diphasique

L'objectif de ce problème est d'analyser le fonctionnement et le dimensionnement d'un thermosiphon diphasique très couramment utilisé et décrit à la figure F.1.

Il comporte une cuve de volume 1 litre, de hauteur 100 mm remplie d'eau et une conduite de diamètre intérieur, D , de 5 mm. Dans sa partie inférieure et horizontale, le tube est chauffé avec une puissance, W , de 800 W. La longueur chauffante, l vaut 100 mm. Pour évaluer les propriétés thermodynamiques de l'écoulement diphasique on considérera que la pression qui y règne est de 1 bar, la température de 100°C et que les phases sont en équilibre thermodynamique.

La partie gauche du dispositif reste en écoulement monophasique liquide tandis que le reste de la conduite non chauffée est adiabatique et est parcourue par un écoulement diphasique d'eau et de sa vapeur. La longueur totale de la conduite L vaut 500 mm.

Les propriétés thermodynamiques et physiques nécessaires au calcul sont données au tableau F.1 et on rappelle en annexe le calcul du coefficient de frottement en écoulement monophasique. On suppose chaque phase considérée séparément comme incompressible.

Dans les questions 4.1 à 4.4, on suppose que le débit est tel que la cuve se vide en 7 minutes. On considère l'écoulement permanent et monodimensionnel. On analyse le fonctionnement quasi

$\rho_L(20^\circ C) = 998,19 \text{ kg/m}^3$	$h_L(20^\circ C) = 83,84 \text{ kJ/kg}$	$\mu_L(20^\circ C) = 1003 \times 10^{-6} \text{ Pa s}$
$\rho_L(100^\circ C) = 958,39 \text{ kg/m}^3$	$h_L(100^\circ C) = 419,06 \text{ kJ/kg}$	$\mu_L(100^\circ C) = 282 \times 10^{-6} \text{ Pa s}$
$\rho_V(100^\circ C) = 0,5975 \text{ kg/m}^3$	$h_V(100^\circ C) = 2675,7 \text{ kJ/kg}$	$\mu_V(100^\circ C) = 12,28 \times 10^{-6} \text{ Pa s}$

Tableau F.1: Propriétés thermodynamiques et physiques de l'eau à 1 bar 20 et 100°C.

permanent du dispositif et on supposera notamment que le niveau du liquide dans le réservoir reste inchangé.

4.1 Bilan d'énergie sur la partie chauffante

Calculer le débit volumique d'eau, Q_0 et le débit masse M_0 , dans la partie amont du dispositif ainsi que la vitesse moyenne de l'eau correspondante, v_{L0} .

Ecrire le bilan d'énergie sur la partie chauffante. Montrer qu'il relie la variation d'enthalpie entre les points B et C à la puissance de chauffage et au débit masse par une expression simple que l'on donnera.

Calculer au point C le titre massique de sortie, x , les débits volume de chaque phase correspondants ainsi que le taux de vide que l'on aurait en considérant l'écoulement homogène.

4.2 Ecoulement dans la partie froide

En intégrant le bilan de quantité de mouvement sur la hauteur de la conduite monophasique, en supposant que la distribution de pression dans le réservoir est hydrostatique, en déduire l'expression de la variation de pression les points A et B.

Calculer la valeur de la variation de pression $\Delta p_{AB} = p_B - p_A$ entre les points correspondants. Quelle remarque peut-on faire sur le résultat ?

4.3 Ecoulement dans la partie adiabatique

Intégrer le bilan de quantité de mouvement dans la partie adiabatique. On orientera l'axe de C vers D. En déduire l'expression de la variation de pression $\Delta p_{CD} = p_D - p_C$. On utilisera la méthode de Lockhart Martinelli.

Comparer la valeur du taux de vide α obtenue par la méthode de Lockart Martinelli à celle obtenue précédemment par le modèle homogène. Interpréter la différence entre ces deux valeurs.

Quelle remarque peut-on faire sur les mécanismes de variation de pression dans cette section ?

4.4 Ecoulement dans la section chauffante

Intégrer le bilan de quantité de mouvement sur la partie chauffante. On orientera l'axe de B vers C. En déduire l'expression de la variation de pression $\Delta p_{BC} = p_C - p_B$.

On notera qu'une fraction très importante du tronçon BC est parcouru par un écoulement monophasique. On estimera donc la perte de pression par frottement en évaluant le frottement moyen comme la moyenne des frottements monophasiques calculés pour les conditions d'entrée et de sortie du tronçon.

On utilisant les résultats de la question précédente, évaluez la variation de pression par accélération, puis la valeur de la variation de pression Δp_{BC} .

Quelle remarque peut-on faire sur l'amplitude des différents mécanismes de variation de la pression ?

4.5 Débit de fonctionnement et stabilité

Comparer ΔP_{AB} et $-\Delta P_{BC}$. D'après vous le débit réel de fonctionnement est-il plus grand ou plus petit que celui considéré dans les questions précédentes. D'après vous le fonctionnement est-il stable ? Il est inutile de faire des calculs, on justifiera la réponse par un raisonnement simple.

Pour déterminer le débit précis de fonctionnement, on propose de simplifier le modèle. En ne gardant que les termes prépondérants pour ΔP_{AB} et ΔP_{BC} , pour un débit supérieur au débit des questions précédentes d'une fraction égale à 10^{-3} . En déduire par la méthode de Newton (ou graphiquement) cette valeur.

4.6 Question bonus

D'après vous quel pourrait-être l'usage du dispositif étudié ?

4.7 Annexe

On rappelle que le coefficient de frottement f représente le frottement pariétal sans dimension,

$$\tau_W = \frac{1}{2} f \rho w^2 \quad (\text{F.4})$$

où ρ et w sont respectivement qu'en écoulement laminaire monophasique, le coefficient de frottement est donné par,

$$f = \frac{16}{Re} \quad (\text{F.5})$$

tandis qu'en écoulement turbulent,

$$f = 0,046 Re^{-0,2} \quad (\text{F.6})$$

La transition est obtenue pour un nombre de Reynolds, Re , de 2000 environ. On peut pratiquement calculer le coefficient de frottement qui convient en calculant les deux expressions et en ne retenant que le plus grand des deux.

Vous pourrez trouver dans quelques jours une solution rédigée de ce problème à l'adresse suivante : herve.lemonnier.sci.free.fr/TPF/TPF.htm

Corrigé du devoir surveillé d'écoulements diphasiques du 21 mars 2005

2 Méthode de Lockart Martinelli pour les pertes de pression

La méthode de Lockart Martinelli permet de calculer les pertes de pression par frottement et le taux de présence de vapeur d'un écoulement diphasique à basse pression. La perte de pression par frottement est exprimée sans dimension en la rapportant à la perte de pression par frottement d'un écoulement monophasique où la phase liquide s'écoulerait seule avec le débit masse de liquide, M_L de l'écoulement diphasique. Cette perte de pression s'exprime par,

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_L = \frac{1}{2} \rho_L w_{Lo}^2 f_{Lo}, \quad (\text{F.1})$$

où w_{Lo} est la vitesse moyenne du liquide correspondant au débit M_L et f_{Lo} est le coefficient de frottement pariétal donné en fonction du nombre de Reynolds du liquide, $Re_{Lo} = \rho_L w_{Lo} D / \mu_L$. Le coefficient de frottement est donné par la relation de Blasius,

$$f = 0,046 Re^{-0,2}. \quad (\text{F.2})$$

La perte de pression par frottement de l'écoulement diphasique s'exprime en fonction de la perte de pression monophasique de référence (F.1) par l'intermédiaire d'un coefficient multiplicateur, Φ_L^2 , (*two-phase multiplier*) selon,

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) = \phi_L^2(X_{tt}) \left(\frac{dp}{dz}\right)_L, \quad (\text{F.3})$$

où le coefficient multiplicateur Φ_L^2 est donné par une corrélation avec le nombre sans dimension de Lockart Martinelli dont la définition est,

$$X_{tt}^2 \triangleq \frac{\left(\frac{dp}{dz}\right)_L}{\left(\frac{dp}{dz}\right)_V}, \quad (\text{F.4})$$

où l'indice V se rapporte à la quantité analogue à (F.1) mais pour la vapeur. Le paramètre de Lockart Martinelli exprime le rapport des pertes de pression que l'écoulement aurait si chaque phase s'écoulait seule dans la conduite. Les indices tt rappellent que l'on suppose l'écoulement turbulent dans chaque phase. En utilisant la définition de la perte de pression par frottement monophasique (F.1) et la corrélation de Blasius (F.2), on montre que,

$$X_{tt} = \left(\frac{\mu_L}{\mu_V}\right)^{0,1} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{0,9} \left(\frac{\rho_V}{\rho_L}\right)^{0,5} \quad (\text{F.5})$$

où x est le titre massique de l'écoulement. En se basant sur des données expérimentales, Lockart et Martinelli proposent les expressions suivantes pour le coefficient multiplicateur et le taux de présence du liquide :

$$\phi_L^2(X) = 1 + \frac{20}{X} + \frac{1}{X^2} \quad (\text{F.6})$$

$$\alpha_L(X) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + 20X + 1}} \quad (\text{F.7})$$

3 Equations de bilan du mélange diphasique

3.1 Bilan de masse du mélange

On rappelle que le bilan de masse moyenné sur la section s'exprime pour chaque phase par,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k w_k \rangle_2 = - \int_{C(z,t)} \frac{\dot{m}_k dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \quad (\text{F.8})$$

Le premier terme représente la variation temporelle de la masse par unité de longueur contenue dans la conduite, le second la différence de débit masse entrant et sortant de la conduite par unité de longueur et le membre de droite correspond à la masse par unité de longueur perdue par changement de phase. En additionnant les équations de chaque phase, les termes de changement de phase s'éliminent en raison de bilan de masse à l'interface ($\dot{m}_L + \dot{m}_V = 0$) et on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_L \langle \rho_L \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial t} A_V \langle \rho_V \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_L \langle \rho_L w_L \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_V \langle \rho_V w_V \rangle_2 \\ = - \int_{C(z,t)} \frac{(\dot{m}_L + \dot{m}_V) dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Dans l'approximation monodimensionnelle, on représente chaque valeur moyenne, $\langle f_k \rangle_2$, par une seule variable, f_k , et on suppose les coefficients de corrélation spatiale égaux à 1 ($\langle f_k g_k \rangle_2 = \langle f_k \rangle_2 \langle g_k \rangle_2$). En introduisant la masse volumique du mélange définie par,

$$\rho = \alpha \rho_V + (1 - \alpha) \rho_L, \quad (\text{F.10})$$

où $\alpha_K = A_k/A$ est le taux de présence de la phase k , on définit la vitesse moyenne du mélange par,

$$\rho w = \alpha \rho_V w_V + (1 - \alpha) \rho_L w_L. \quad (\text{F.11})$$

Compte tenu de ces définitions, le bilan de masse du mélange (F.9) s'exprime alors par,

$$\frac{\partial}{\partial t} A \rho + \frac{\partial}{\partial z} A \rho w = 0. \quad (\text{F.12})$$

3.2 Bilan de quantité de mouvement du mélange

On rappelle que le bilan de quantité de mouvement moyenné sur la section et projeté sur l'axe orienté de la conduite s'exprime pour chaque phase par,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k w_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k w_k^2 \rangle_2 \\ + A_k \langle \frac{\partial p_k}{\partial z} \rangle_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{e}_z \rangle_2 - A_k \langle \rho_k \mathbf{F}_k \rangle_2 \\ = - \int_{C(z,t)} (\dot{m}_k w_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{e}_z) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k(z,t)} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{e}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

où l'on a séparé la partie pression et visqueuse du tenseur des contraintes et utilisé la forme limite du théorème de Leibniz pour regrouper les termes de pression. Les termes de cette équation ont la signification suivante : variation de quantité de mouvement dans la section, différence de flux de quantité de mouvement entrante et sortante dans la section, ces deux premiers termes représentent l'accélération du fluide, bilan des forces de pression sur la section, bilan des contraintes visqueuses sur la section, forces de volume, effet des pertes de quantité de

mouvement par changement de phase et frottement visqueux à l'interface, effet du frottement pariétal.

En additionnant les équations de chaque phase et en utilisant le bilan de quantité de mouvement à l'interface, on obtient,

$$\frac{\partial}{\partial t} A \rho w + \frac{\partial}{\partial z} A (\alpha \rho_V w_V^2 + (1 - \alpha) \rho_L w_L^2) = -A \frac{dp}{dz} - P \tau_w + A \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z. \quad (\text{F.14})$$

3.3 Bilan d'énergie totale du mélange

On rappelle que le bilan d'énergie totale moyenné sur la section de la conduite s'exprime pour chaque phase par,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k \left(h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2 - \frac{\partial}{\partial t} A_k < p_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k w_k \left(h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2 \\ + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{q}_k >_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{e}_z \cdot \nabla_k \cdot \mathbf{v}_k >_2 - A_k < \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k >_2 \\ = - \int_{C(z,t)} \left(\dot{m}_k \left(u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{q}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k \right) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \\ - \int_{C_k(z,t)} (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{q}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

où l'on a séparé la partie pression et visqueuse du tenseur des contraintes et introduit la définition de l'enthalpie $h \triangleq u + p/\rho$. Les termes de cette équation ont la signification suivante : en regroupant les deux premiers, variation d'énergie totale dans la section, différence de flux d'enthalpie totale entrant et sortant dans la section, bilan des flux de chaleurs longitudinaux, puissance des contraintes visqueuses appliquées sur la section, puissance des forces de volume, effet des pertes d'énergie totale par changement de phase, du flux de chaleur à l'interface, puissance des contraintes appliquées à l'interface et flux de chaleur pariétal.

On obtient l'équation de bilan du mélange en additionnant les équations de chaque phase, en utilisant le bilan d'énergie total à l'interface et en négligeant le saut de pression à l'interface. Il faut de plus négliger l'ensemble des termes cinétiques, l'effet des flux de chaleur et contraintes visqueuses longitudinales et la puissance des forces de volume. On obtient dans ces conditions,

$$\frac{\partial}{\partial t} A (\alpha \rho_V h_V + (1 - \alpha) \rho_L h_L) - A \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} A (\alpha \rho_V w_V h_V + (1 - \alpha) \rho_L w_L h_L) = P q, \quad (\text{F.16})$$

où q est le flux de chaleur pariétal. En introduisant le titre massique de l'écoulement $x = M_k/M$ et le débit masse total $M = M_V + M_L$, on obtient,

$$\frac{\partial}{\partial t} A (\alpha \rho_V h_V + (1 - \alpha) \rho_L h_L) - A \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} M (x h_V + (1 - x) h_L) = P q. \quad (\text{F.17})$$

4 Analyse du fonctionnement d'une thermosiphon diphasique

L'objectif de ce problème est d'analyser le fonctionnement et le dimensionnement d'un thermosiphon diphasique très couramment utilisé et décrit à la figure F.1. Il comporte une cuve de volume 1 litre de hauteur 100 mm remplie d'eau et une conduite de diamètre $D = 5$ mm. Dans sa partie inférieure et horizontale le tube est chauffé avec une puissance, W , de 800 W. La longueur chauffante, l vaut 100 mm. Pour évaluer les propriétés thermodynamiques on considèrera

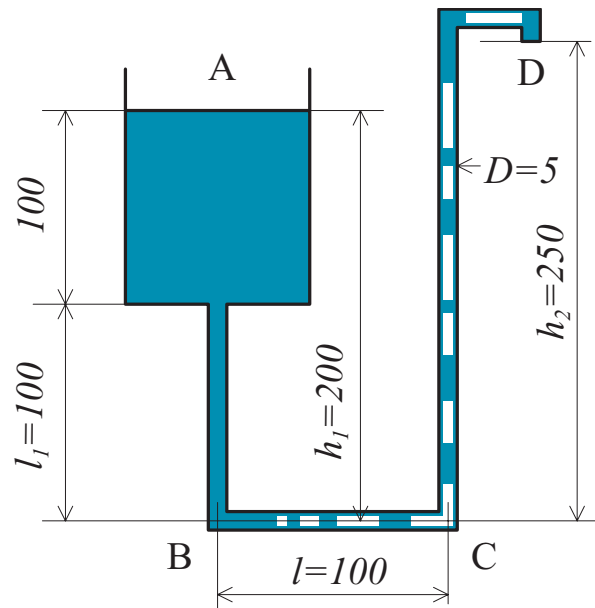


Figure F.1: Description schématique d'un thermosiphon diphasique. Toutes les cotes sont en millimètres.

$\rho_L(20^\circ\text{C}) = 998,19 \text{ kg/m}^3$	$h_L(20^\circ\text{C}) = 83,84 \text{ kJ/kg}$	$\mu_L(20^\circ\text{C}) = 1003 \times 10^{-6} \text{ Pa s}$
$\rho_L(100^\circ\text{C}) = 958,39 \text{ kg/m}^3$	$h_L(100^\circ\text{C}) = 419,06 \text{ kJ/kg}$	$\mu_L(100^\circ\text{C}) = 282 \times 10^{-6} \text{ Pa s}$
$\rho_V(100^\circ\text{C}) = 0,5975 \text{ kg/m}^3$	$h_V(100^\circ\text{C}) = 2675,7 \text{ kJ/kg}$	$\mu_V(100^\circ\text{C}) = 12,28 \times 10^{-6} \text{ Pa s}$

Tableau F.1: Propriétés thermodynamiques et physiques de l'eau à 1 bar 20 et 100°C.

que la pression qui y règne est de 1 bar, la température de 100°C et que les phases sont en équilibre thermodynamique. La partie gauche du dispositif reste en écoulement monophasique liquide tandis que le reste de la conduite non chauffée est adiabatique et est parcourue par un écoulement diphasique d'eau et de sa vapeur. La longueur totale de la conduite L vaut 500 mm. Les propriétés thermodynamiques et physiques nécessaires au calcul sont données au tableau F.1.

Dans les questions 4.1 à 4.4, on suppose que le débit est tel que la cuve se vide en 7 minutes. On considère l'écoulement permanent et monodimensionnel et que le niveau de la cuve reste inchangé.

4.1 Bilan d'énergie sur la partie chauffante

La cuve de 1 litre se vide en 7 minutes. Le débit volumique de liquide est donc,

$$Q_0 = \frac{1}{7} \text{ l/s} = 2,38 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}. \quad (\text{F.18})$$

Le débit masse vaut,

$$M_0 = \rho_L Q_0 = 2,38 \times 10^{-3} \text{ kg/s}. \quad (\text{F.19})$$

L'aire de la section droite de la conduite vaut,

$$A = \pi \frac{D^2}{4} = 19,6 \text{ mm}^2 = 1,96 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \quad (\text{F.20})$$

La vitesse moyenne du liquide vaut donc,

$$w_{L0} = \frac{Q}{A} = 0,121 \text{ m/s} \quad (\text{F.21})$$

Le bilan d'énergie sur la partie chauffante est donné par (F.17). En l'intégrant sur la longueur chauffante, l , on obtient,

$$M(h_C - h_B) = Plq = W \quad (\text{F.22})$$

où l'enthalpie en C s'exprime en fonction du titre par, x ,

$$h_C = xh_{VC} + (1 - x)h_{LC}. \quad (\text{F.23})$$

On en déduit le titre de sortie par,

$$x = \frac{h_B - h_{LC} + \frac{W}{M}}{h_{VC} - h_{LC}} = 6,16 \times 10^{-4}. \quad (\text{F.24})$$

Le débit volumique de la phase liquide et de la phase vapeur valent,

$$Q_L = \frac{M(1 - x)}{\rho_{LC}} = 2,478 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}, \quad (\text{F.25})$$

$$Q_V = \frac{Mx}{\rho_{VC}} = 2,449 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}. \quad (\text{F.26})$$

Le taux de vide du modèle homogène est égal au titre volumique β qui vaut,

$$\alpha_H = \beta = \frac{Q_V}{Q_V + Q_L} = 0,497. \quad (\text{F.27})$$

4.2 Écoulement dans la partie froide

Le bilan de quantité mouvement est donné par (F.14). On oriente l'axe dans le sens de l'écoulement c'est-à-dire vers le bas,

$$0 = -A \frac{dp}{dz} - P\tau_w + A\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z \quad (\text{F.28})$$

soit,

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{P}{A}\tau_w + \rho Lg \quad (\text{F.29})$$

Car en écoulement monophasique permanent, il n'y a pas d'accélération, le bilan de masse imposant w constant. Intégré sur la hauteur du réservoir où seule la gravité contribue et dans la partie gauche de la conduite où le frottement et la gravité son pris en compte, on a simplement,

$$p_B - p_A = \Delta P_{BA} = -\frac{4l_1}{D}\tau_w + \rho Lgh_1 \quad (\text{F.30})$$

L'application numérique donne,

$$Re_L = 603 \quad (\text{F.31})$$

$$f_L = 2,65 \times 10^{-2} \quad (\text{F.32})$$

$$-\frac{4l_1}{D}\tau_w = -0,16 \text{ hPa} \quad (\text{F.33})$$

$$\rho Lgh_1 = 19,6 \text{ hPa} \quad (\text{F.34})$$

On en déduit,

$$\Delta P_{BA} = 19,4 \text{ hPa} \quad (\text{F.35})$$

Les vitesses étant faibles, on observe que la perte de pression par frottement l'est également et qu'elle aurait pu être négligée.

4.3 Écoulement dans la partie adiabatique

Dans la partie adiabatique CD, le bilan de quantité de mouvement s'écrit comme précédemment car l'écoulement étant établi et sans changement de phase la perte de pression par accélération peut être négligée. On oriente l'axe dans le sens de l'écoulement qui est ascendant.

$$p_D - p_C = \Delta P_{CD} = -\frac{4l_2}{D}\tau_w - \rho gh_2 \quad (\text{F.36})$$

où $l_2=300$ mm est la longueur de cette conduite. En appliquant la méthode de Lockhart Martinelli on détermine la perte de pression par frottement et le taux de vide. La vitesse de l'écoulement liquide w_{Lo} seul se calcule à partir du débit volumique de liquide entrant (F.25)

$$w_{Lo} = \frac{Q_L}{A} = 0,126 \text{ m/s} \quad (\text{F.37})$$

On obtient le nombre de Reynolds et le coefficient de frottement correspondant par leurs définitions respectives,

$$Re_{Lo} = 2145 \quad (\text{F.38})$$

$$f_{Lo} = 9,92 \times 10^{-3} \quad (\text{F.39})$$

La perte de pression par frottement en liquide seul vaut,

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{Lo} = -\frac{4l_2}{D} \frac{1}{2} f_{Lo} \rho_{LC} w_{Lo}^2 = -0,18 \text{ hPa} \quad (\text{F.40})$$

Le paramètre de Lockart Martinelli (F.5) vaut,

$$X_{tt} = 26,5 \quad (\text{F.41})$$

On en déduit le coefficient multiplicateur Φ_L^2 par (F.6) et le taux de présence du liquide, α_L par (F.7), ce qui donne,

$$\Phi_L^2 = 1,76 \quad (\text{F.42})$$

$$\alpha_L = 0,755 \quad (\text{F.43})$$

Ces deux dernières quantités permettent de calculer la masse volumique moyenne, ρ , définie par (F.10),

$$\rho = \alpha_L \rho_L + (1 - \alpha_L) \rho_V = 723,2 \text{ kg/m}^3. \quad (\text{F.44})$$

La variation de pression gravitaire vaut donc,

$$-\rho gh_2 = -17,7 \text{ hPa} \quad (\text{F.45})$$

et la variation de pression par frottement vaut,

$$-\frac{4l_2}{D}\tau_w = \phi_L^2 \left(\frac{dp}{dz}\right)_{Lo} = -0,32 \text{ hPa} \quad (\text{F.46})$$

La variation de pression entre D et C (F.36) est donc donnée par,

$$p_D - p_C = \Delta P_{CD} = -18,1 \text{ hPa} \quad (\text{F.47})$$

Le taux de vide calculé par la méthode de Lockhart Martinelli vaut $\alpha = 1 - \alpha_L = 0,246$. Cette valeur est inférieure à celle du modèle homogène ce qui semble logique en écoulement vertical ascendant où l'on s'attend à ce que la vitesse moyenne de la vapeur soit plus grande que celle du liquide en raison des effets de flottabilité. On observe par ailleurs que la perte de pression par gravité est ici encore le terme principal.

4.4 Section chauffante

Dans la section chauffante BC, le bilan de quantité de mouvement s'écrit toujours,

$$\frac{d}{dz} A(\alpha \rho_V w_V^2 + (1 - \alpha) \rho_L w_L^2) = -A \frac{dp}{dz} - P \tau_w \quad (\text{F.48})$$

où l'on a supprimé la composante hydrostatique en raison de la position horizontale du canal. En intégrant entre B et C, on obtient,

$$p_C - p_B = - [\alpha \rho_V w_V^2 + (1 - \alpha) \rho_L w_L^2]_B^C - \frac{4}{D} \overline{\tau_w} l \quad (\text{F.49})$$

où le premier terme représente l'accélération du fluide résultant du changement de phase et le second représente la perte de pression par frottement. La première vaut,

$$\rho_L w_{LO}^2 - (\alpha \rho_V w_{VC}^2 + (1 - \alpha) \rho_L w_{LC}^2) = -5,6 \text{ Pa} \quad (\text{F.50})$$

où l'on a calculé les vitesses moyennes de chaque phase w_k à partir de la définition du débit volumique $Q_k = \alpha_k A w_k$. Pour évaluer la perte de pression par frottement, on utilise encore le coefficient multiplicateur Φ_L^2 calculé précédemment. On considère que la contrainte de cisaillement moyenne est la valeur moyenne entre la contrainte monophasique et celle calculée en sortie de dispositif, de sorte que l'on aura,

$$-\frac{4}{D} \overline{\tau_w} l = \frac{1}{2} (1 + \Phi_L^2) \left(\frac{dp}{dz} \right)_{Lo} \quad (\text{F.51})$$

avec la perte de pression de référence évaluée avec le débit masse du liquide à la sortie de la section chauffante comme précédemment

$$\left(\frac{dp}{dz} \right)_{Lo} = -\frac{4l}{D} \frac{1}{2} f_{Lo} \rho_L w_{Lo}^2 = -6,1 \text{ Pa} \quad (\text{F.52})$$

Finalement on obtient,

$$-\frac{4}{D} \overline{\tau_w} l = -8,5 \text{ Pa} \quad (\text{F.53})$$

Au total on obtient la variation de pression au bornes de l'élément chauffant,

$$p_C - p_B = -0,14 \text{ hPa} \quad (\text{F.54})$$

On observe que cette dernière est négligeable devant celles des tronçons AB et CD et qu'in aurait pu la négliger pour cette valeur du débit.

4.5 Point de fonctionnement

L'analyse des questions précédentes montre que les termes prépondérants des variations de pression sont les composantes hydrostatiques. On peut donc ne raisonner que sur ces dernières pour comprendre le fonctionnement du thermosiphon. On a alors pour un débit de 1/7 l/s,

$$p_B - p_A = \Delta P_{BA} \approx \rho_L g h_1 = 19,6 \text{ hPa} \quad (\text{F.55})$$

$$p_B - p_D \approx p_C - p_D = -\Delta P_{CD} \approx \rho g h_2 = 17,9 \text{ hPa} \quad (\text{F.56})$$

La variation de pression motrice (F.55) est constante et ne dépend que du niveau dans la cuve (voir figure F.1). La variation de pression résistante (F.56) ne dépend que de la masse volumique moyenne dans la partie adiabatique qui à son tour ne dépend que du taux de liquide moyen dans cette partie α_L donné par (F.7) qui à son tour dépend directement de X_{tt} qui ne dépend que du titre massique à la sortie de l'élément chauffant donné par le bilan d'énergie

(F.22).

Les deux variations de pression ne sont donc pas équilibrées pour le débit considéré.

Il est donc clair que si le débit augmente légèrement, le titre à la sortie de l'élément chauffant diminue. Pour une valeur du titre, x , proche de 0, le paramètre de Lockhart-Martinelli augmente avec la diminution du titre. En conséquence le taux de liquide moyen augmente, α_L également. Il d'ailleurs est logique que le taux de vide augmente avec le titre. En l'occurrence, l'augmentation du débit alourdit la partie adiabatique du thermosyphon, ce qui va dans le sens de son équilibre. Pour un débit supérieur à celui donné par (F.19) de 10^{-3} , l'application numérique donne,

$$x = \frac{h_B - h_{LC} + \frac{W}{M}}{h_{VC} - h_{LC}} = 4,67 \times 10^{-4}. \quad (\text{F.57})$$

$$X_{tt} = 33,98 \quad (\text{F.58})$$

$$\alpha_L = 0,793 \quad (\text{F.59})$$

$$\rho = \alpha_L \rho_L + (1 - \alpha_L) \rho_V = 760,3 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{F.60})$$

$$p_B - p_D \approx \rho g h_2 = 18,6 \text{ hPa} \quad (\text{F.61})$$

Avec ces deux points de fonctionnement, on peut estimer le débit réel de fonctionnement en supposant que la variation de pression résistante évolue linéairement avec le débit selon,

$$\Delta P_{DB}(\eta) = \Delta P_{DB}(0) + \frac{\Delta P_{DB}(10^{-3}) - \Delta P_{DB}(0)}{10^{-3}} \eta = 17,9 + \frac{18,6 - 17,9}{10^{-3}} \eta \text{ hPa} \quad (\text{F.62})$$

Avec $Q = Q_0(1 + \eta)$. On en déduit le débit réel de fonctionnement en égalant pression motrice (F.55) et résistante (F.62), ce qui conduit à

$$\Delta P_{DB}(\eta) = 17,9 + 700\eta = 19,6 \quad (\text{F.63})$$

$$\eta \approx \frac{19,6 - 17,9}{700} \approx 2,3 \cdot 10^{-3}. \quad (\text{F.64})$$

La figure F.2 montre l'évolution des variations de pression (F.55) et (F.56) avec le débit sans dimension. On observe bien que le point de fonctionnement est obtenu pour une valeur légèrement positive de η et proche de celle donnée par (F.63).

la figure F.2 permet également de discuter la stabilité de ce point de fonctionnement. L'augmentation du débit ($\eta > 0$) augmente le poids de la colonne diphasique et s'oppose donc à l'augmentation du débit. Le fonctionnement est donc stable.

La figure F.3 montre les caractéristiques interne (F.30) et externe donnée par la somme de (F.36) et (F.49) du thermosyphon. On observe que pour un débit proche du débit nominal, le modèle simplifié est bien justifié. En revanche, pour des débit plus faibles, les pertes de pression par frottement prennent de l'importance, surtout pour la partie résistante. En effet, le titre augmente beaucoup lorsque le débit diminue et la vitesse moyenne dans la partie diphasique augmente très sensiblement. On observe que la caractéristique externe adopte une forme en S indiquant que le fonctionnement peut devenir instable notamment lorsque le niveau dans la cuve diminue. En effet, lorsque la cuve est pratiquement vide, $h_1 \approx 100 \text{ mm}$, $\Delta P_{AB} \approx 1000 \text{ Pa}$ on remarquera que l'intersection des caractéristiques donne trois points d'intersection.

Lorsque la cuve se vide, h_1 diminue et la courbe représentant ΔP_{AB} se déplace vers le bas. Le point de fonctionnement reste proche de $\eta = 1$. La pente étant très raide, le débit évolue peu. En revanche, lorsque la cuve se vide, on suit la caractéristique externe jusqu'au minimum de la courbe ($\eta \approx 0,9$) puis le débit transite brutalement vers une valeur de $\eta \approx 0,15$. Ce comportement est caractéristique des instabilités statiques des thermosyphons diphasiques et peut conduire à un endommagement de la partie chauffante si elle n'est pas conçue pour fonctionner à débit très réduit.

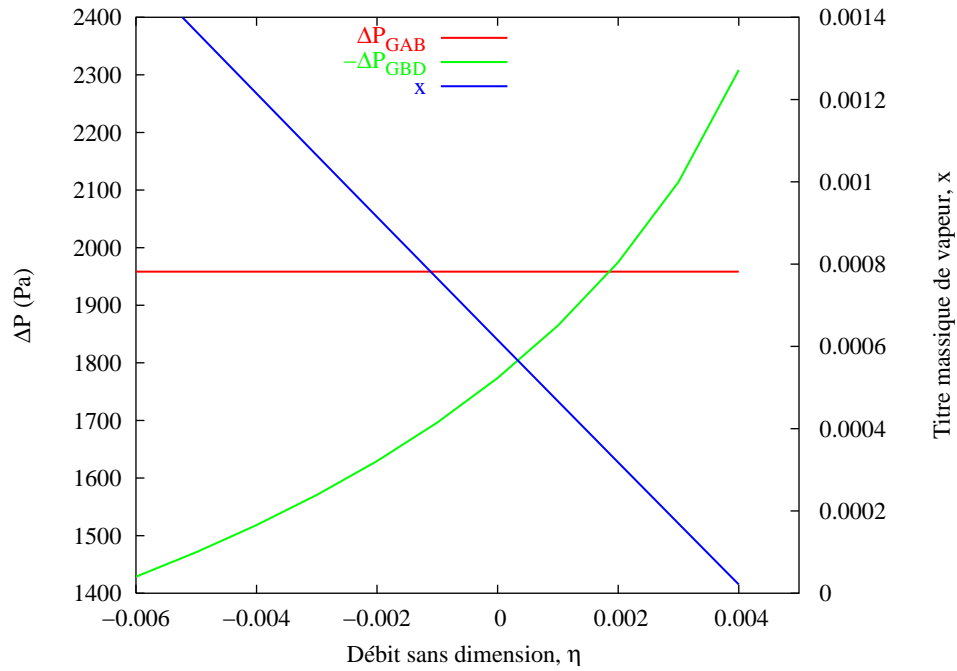


Figure F.2: Caractéristique simplifiée du thermosiphon diphasique au voisinage du débit $Q_0 = 1/7$ l/s. η est le débit sans dimension, $\eta = Q/Q_0$. Calcul : `Cafe02.for`, Graphe : `CaractZoom.plt`

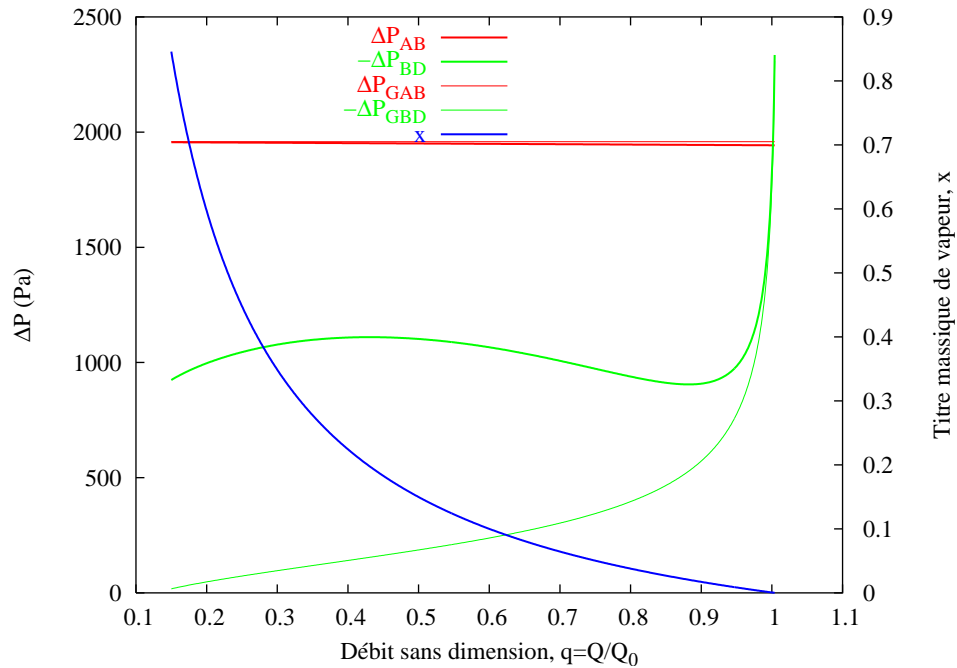


Figure F.3: Caractéristiques interne et externe du thermosiphon diphasique en fonction du débit sans dimension, Q/Q_0 . Calcul : `Cafe02.for`, Graphe : `Caract.plt`

4.6 Question bonus

Le thermosiphon étudié est une machine à café. Sa conception est robuste puisque son fonctionnement est décrit par un modèle simple qui ne dépend pas du détail des pertes de pression. Cette robustesse est par ailleurs confirmée par la grande raideur de la caractéristique au voisinage du point de fonctionnement. De plus, on pourrait montrer que son fonctionnement pourrait aussi bien être décrit par le modèle homogène ce que l'on vous encourage à faire à titre d'exercice. On peut, à l'aide des modèles utilisés ici, étudier l'effet de son entrartrage (réduction du diamètre)

sur son fonctionnement. On pourrait également compléter l'étude par l'analyse des transferts de chaleur dans la partie chauffante et calculer l'augmentation de température de l'élément chauffant liée à la transition de débit observée lorsque la cuve est pratiquement vide.

Devoir surveillé d'écoulements diphasiques du 7 mars 2006

Modalités

Le devoir comporte, d'une part, des questions de cours et, d'autre part, deux exercices indépendants. Tous les documents et moyens de calcul sont autorisés. On demande des réponses justifiées et concises qui peuvent éventuellement être accompagnées d'un croquis dont la légende sera bien explicitée. Il *est inutile de détailler* les développements analytiques pourvu que le passage d'une expression à la suivante soit expliqué avec soin. On notera que la plupart des questions des exercices sont indépendantes.

1 Taux de vide

Donner la définition du taux de présence local de phase, α_k , et sa relation avec la fonction indicatrice de phase dont on rappellera la définition.

2 Condensation

Décrire très succinctement les différents régimes de transferts de chaleur en condensation. Quelle est dans ce mode de transfert, la résistance principale au transfert de chaleur. Il est inutile de détailler les corrélations décrivant ces différents régimes.

3 Règle de Leibniz et théorème de Gauss

Enoncer la règle de Leibniz et le théorème de Gauss. Décrire succinctement leur usage.

4 Equations de bilan de masse et d'énergie totale

Rappeler la forme locale des équations monophasiques de bilan de masse et d'énergie totale. Donner une interprétation sommaire de chacun des termes de ces équations.

4.1 Bilan de masse du mélange diphasique dans un réservoir

En utilisant le bilan de masse local, la règle de Leibniz et le théorème de Gauss, montrer que le bilan de masse, sur un volume fixe imperméable muni d'un seul orifice de sortie et contenant un mélange de liquide et de sa vapeur, peut se mettre sous la forme ,

$$\frac{d}{dt} V \langle \rho \rangle_3 + S \langle \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_2 = 0, \quad (\text{F.1})$$

où on donnera la signification physique de chaque terme. On notera ρ la masse volumique du mélange et \mathbf{v} la vitesse du mélange dont on rappellera la définition. On notera par les indices V et L les états vapeur et liquide si nécessaire. On notera par l'opérateur $\langle \rangle_3$ la moyenne sur le volume du réservoir et $\langle \rangle_2$ la moyenne sur la section droite de l'orifice de sortie. On notera \mathbf{n} la normale extérieure au volume, V , représentant le réservoir et S l'aire de la section droite de l'orifice de sortie.

4.2 Bilan d'énergie totale du mélange diphasique dans un réservoir

En procédant comme précédemment montrer que le bilan d'énergie totale du mélange diphasique dans le réservoir peut se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dt} V \left\langle \rho u \right\rangle_3 + S \left\langle \rho (h + 1/2 v^2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right\rangle_2 = P, \quad (\text{F.2})$$

où P représente la puissance thermique apportée au réservoir. On notera u l'énergie interne et h l'enthalpie. On indiquera sommairement les termes qu'il faut négliger pour obtenir cette équation.

5 Fonctionnement accidentel d'un autocuiseur

On considère un autocuiseur domestique. Son volume, V , est de 10 litres et il est muni sur son couvercle d'un orifice de sortie pour la vapeur et d'une soupape de sécurité. On considère son fonctionnement accidentel dans la situation où l'orifice de sortie de la vapeur est bouché et qu'il est rempli initialement complètement d'eau à 20°C et que la pression qui y règne initialement est de 1 bar. Il est chauffé avec une puissance thermique, P , de 1 kW.

Dans ce qui suit, on supposera que la soupape de sécurité s'ouvre lorsque la pression interne dépasse 5 bar. On simplifie son fonctionnement en supposant que la soupape s'ouvre de façon à ce que la pression interne reste égale à 5 bar.

5.1 Montée en pression initiale

En considérant le bilan de masse et d'énergie totale, montrer que la montée en pression est décrite par une équation de la forme,

$$\left(\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T - \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p} \right) \frac{dp}{dt} = \frac{P}{V\rho}. \quad (\text{F.3})$$

A l'aide des données thermodynamiques du tableau F.1, estimer la vitesse de montée en pression initiale.

T °C	P bar	ρ_L kg/m ³	h_L kJ/kg	u_L kJ/kg	T °C	P bar	ρ_L kg/m ³	h_L kJ/kg	u_L kJ/kg
20.	1.	998.23	83.93	83.83	20.	1.	998.23	83.93	83.83
20.	2.	998.28	84.02	83.82	22.	1.	997.79	92.29	92.19
20.	3.	998.32	84.12	83.81	24.	1.	997.32	100.66	100.56
20.	4.	998.37	84.21	83.81	26.	1.	996.80	109.03	108.93
20.	5.	998.41	84.30	83.80	28.	1.	996.24	117.39	117.29
					30.	1.	995.65	125.76	125.66

Tableau F.1: Extrait des tables de propriétés thermodynamiques de l'eau et de la vapeur (?) pour l'eau liquide au voisinage des conditions initiales, $p = 1$ bar et $T = 20^\circ\text{C}$.

5.2 Montée en température

En utilisant les résultats précédents ou directement les données des tableaux F.1 et F.2, estimer la durée de la montée en pression jusqu'au moment de l'ouverture de la soupape ainsi que la température atteinte.

5.3 Décharge à pression constante

Dans la suite on supposera que l'eau reste liquide tant qu'elle n'atteint pas la température de saturation pour la pression interne de l'autocuiseur. On supposera ensuite que la vapeur et le

T °C	P bar	ρ_L kg/m ³	h_L kJ/kg	u_L kJ/kg	T °C	P bar	ρ_L kg/m ³	h_L kJ/kg	u_L kJ/kg
20.	5.	998.41	84.30	83.80	144.	5.	922.64	606.50	605.96
22.	5.	997.98	92.67	92.17	146.	5.	920.80	615.10	614.56
24.	5.	997.50	101.03	100.53	148.	5.	918.94	623.71	623.17
26.	5.	996.98	109.39	108.89	150.	5.	917.07	632.33	631.79
28.	5.	996.42	117.76	117.26	152.	5.	915.18	640.96	640.41
30.	5.	995.83	126.12	125.62	154.	5.	913.27	649.60	649.05

Tableau F.2: Extrait des tables de propriétés thermodynamiques de l'eau et de la vapeur (?) pour l'eau liquide à 5 bar au voisinage des conditions initiales de température, $T = 20^\circ\text{C}$ et des conditions de saturation, $T = 151.87^\circ\text{C}$.

liquide sont à l'équilibre thermodynamique.

Décrire qualitativement l'évolution de la température et de la pression. Calculer la masse restante dans l'autocuiseur lorsque la température de saturation est atteinte. Estimer la durée de cette seconde phase ainsi que le débit masse s'échappant par la soupape lorsque la température de saturation est atteinte. Les propriétés thermodynamiques nécessaires sont données au tableau F.3. On supposera que le fluide qui s'échappe par la soupape possède les propriétés thermodynamiques du fluide contenu dans le réservoir.

P bar	T °C	h_L kJ/kg	h_V kJ/kg	v_L m ³ /kg	v_V m ³ /kg	s_L kJ/kg/K	s_V kJ/kg/K	c m/s
5.00	151.87	640.38	2748.62	1.0925E-03	.37486	1.8610	6.8214	4.56
4.90	151.11	637.10	2747.71	1.0917E-03	.38206	1.8533	6.8282	6.84
4.80	150.33	633.76	2746.78	1.0908E-03	.38956	1.8455	6.8351	9.13
4.70	149.55	630.37	2745.84	1.0899E-03	.39736	1.8375	6.8421	11.42
4.60	148.75	626.92	2744.86	1.0891E-03	.40548	1.8293	6.8493	13.71
4.50	147.94	623.42	2743.87	1.0882E-03	.41396	1.8211	6.8567	16.00
4.40	147.11	619.85	2742.85	1.0873E-03	.42281	1.8126	6.8642	18.30

Tableau F.3: Extrait des tables de propriétés thermodynamiques de l'eau et de la vapeur (?) pour l'eau et sa vapeur en équilibre thermodynamique (conditions de saturation). h est l'enthalpie, s , est l'entropie, v est le volume massique ($v = 1/\rho$), ρ est la masse volumique et c est la vitesse du son du modèle homogène pour une détente isentropique à partir du liquide saturé à 5 bar.

5.4 Dimensionnement de la soupape de sécurité

La soupape de sécurité possède un orifice de sortie dont la section, S , est de 1 mm² et on désire vérifier qu'elle permet d'évacuer un débit masse de 0.25 g/s.

On schématise la soupape par un conduit convergent monodimensionnel. Ecrire les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale sur ce conduit en écoulement permanent. On supposera l'écoulement homogène et à l'équilibre thermodynamique. Montrer que si on suppose que l'écoulement s'effectue sans frottement et est adiabatique, toutes les équations de bilan s'intègrent et donnent,

$$m = S\rho w, \quad (\text{F.4})$$

$$h_0 = h + \frac{1}{2}w^2, \quad (\text{F.5})$$

$$s_0 = s. \quad (\text{F.6})$$

où m est le débit masse traversant le système, w est la vitesse du mélange diphasique, h est

l'enthalpie du mélange diphasique, et s l'entropie du mélange. On pourra utiliser la relation de Gibbs, $Tds = dh - dp/\rho$. L'indice 0 se rapporte aux conditions régnant dans le récipient.

5.5 Calcul de la décharge isentropique

Rappeler la définition de l'enthalpie, l'entropie et du volume massique du mélange, $v = 1/\rho$. Montrer que si on suppose l'équilibre thermodynamique ces quantités peuvent s'écrire $f = xf_{Vsat} + (1-x)f_{Lsat}$, où on rappellera la signification de chaque terme.

On s'intéresse aux conditions dans l'autocuisseur relatives à la saturation à 5 bar. Montrer que l'on peut calculer simplement le titre massique, la vitesse moyenne et le flux massique, $G = \rho v$ en sortie en fonction de la pression appliquée à la sortie de la soupape.

A l'aide des données du tableau F.3, calculer numériquement ces quantités pour une pression de sortie de 4,7, 4,6, 4,5 bar. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau. Interpréter la variation de G avec la pression aval. Comparer la vitesse de sortie à la vitesse du son, c , du modèle homogène. Que concluez-vous ?

5.6 Débit critique

Estimer le débit masse maximum pouvant être évacué à travers la soupape de sécurité et la pression de sortie correspondante lorsque le liquide contenu dans l'autocuisseur est à saturation pour 5 bar.

On appelle ces quantités le débit critique et la pression critique. Comparer ce débit à celui qu'il est nécessaire d'évacuer pour une puissance de chauffage P de 1kW (0.25 g/s). Qu'en concluez-vous ? Que deviennent ces valeurs lorsque la puissance de chauffage est de 15 kW. Que pensez-vous du dimensionnement de la soupape.

6 Fonctionnement nominal d'un autocuisseur

On considère le fonctionnement nominal d'un autocuisseur. On considère le régime quasi permanent où on supposera que le liquide et la vapeur sont en équilibre thermodynamique. On supposera de plus que la soupape placée sur l'orifice d'évacuation de la vapeur possède un fonctionnement tel que la pression dans l'autocuisseur reste égale à 2 bar. La soupape de sécurité, considérée précédemment, ne s'ouvrant qu'à 5 bar, on notera qu'elle reste fermée.

On donne l'enthalpie de changement de phase pour les conditions de saturation à deux bar,

$$h_{LV} = h_{Vsat} - h_{Lsat} = 2706,19 - 503,778 \approx 2202 \text{ kJ/kg} \quad (\text{F.7})$$

Le résultat connu qu'on vous demande de ré-établir est le suivant. Si l'on chauffe l'autocuisseur avec une puissance thermique P , dans les conditions nominales décrites plus haut et qu'il n'en sort que de la vapeur, le débit de vapeur produit, m_V , est tel que,

$$m_V h_{LV} = P \quad (\text{F.8})$$

On propose d'établir le résultat précédent à partir des équations de bilan de masse et d'énergie totale pour chacune des phases présentes dans l'autocuisseur. Cette démarche permettra d'identifier les hypothèses nécessaires à l'obtention du résultat simplifié (F.8). Pour vous aider on vous propose le cheminement suivant.

6.1 Bilans de masse

Intégrer le bilan de masse local sur la partie du volume V occupée par la phase k . On appellera V_k ce domaine et on rappelle qu'il est limité par les interfaces entre les deux phases que l'on nommera A_i , la partie de la paroi de l'autocuisseur mouillée par la phase k que l'on nommera ∂V_k et S : en effet il ne faut pas oublier que l'autocuisseur est ouvert et que chaque phase peut sortir par l'orifice de sortie. On appellera S_k la partie de la section S occupée par la phase k . Montrer que ce bilan se met sous la forme suivante,

$$\frac{dM_k}{dt} + \Gamma_k + m_k = 0 \quad (\text{F.9})$$

où on donnera l'expression de chacun des termes ainsi que leur signification physique. On vérifiera que lorsque l'on somme les deux bilans de masse, on retrouve le bilan du mélange (F.10)

6.2 Bilans d'énergie totale

Intégrer le bilan d'énergie totale sur la partie du volume V occupée par la phase k . Montrer que si l'on néglige les variations d'énergie cinétique (les phases sont stagnantes), la puissance des forces de volume et que l'on néglige tous les effets visqueux, ce bilan se met sous la forme,

$$\frac{dU_k}{dt} + H_{ki} + P_{ki} + \dot{H}_k + P_k = 0 \quad (\text{F.10})$$

où on donnera l'expression de chacun des termes ainsi que leur signification physique. On vérifiera que lorsque l'on somme les deux bilans d'énergie, on retrouve le bilan du mélange (F.2).

6.3 Simplification des bilans de masse et d'énergie

On suppose maintenant qu'il ne sort que de la vapeur de l'autocuisseur et que les profils des différentes grandeur dans l'autocuisseur et en sortie d'orifice sont uniformes. Lorsque cela sera nécessaire, on supposera que les valeurs moyennes des grandeurs thermodynamiques à l'orifice sont égales à celles du fluide contenu dans l'autocuisseur. On suppose de plus que le flux de chaleur extérieur n'est déposé que dans le liquide et que la vapeur est adiabatique.

Montrer alors dans ces conditions que l'on obtient,

$$P_{Li} = P \quad (\text{F.11})$$

$$P_{Vi} = 0 \quad (\text{F.12})$$

On donnera la signification physique de ces équations.

6.4 Bilans aux interfaces

Il est clair que les quatre équations de bilan (F.89) et (F.102) ne suffisent pas à résoudre tout le problème. Il faut aussi considérer les bilans de masse et d'énergie à l'interface. En intégrant les relations de saut à l'interface, quelle relation peut-on trouver entre Γ_L et Γ_V , d'une part et H_{Vi} , H_{Li} , P_{Li} et P_{Vi} , d'autre part ? En déduire le résultat attendu,

$$m_V = \frac{P}{h_{Vsat} - h_{Lsat}} \quad (\text{F.13})$$

Corrigé du devoir surveillé d'écoulements diphasiques du 7 mars 2006

4 Equations de bilan de masse et d'énergie totale

Le bilan de masse monophasique s'écrit (voir Ch. 3),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (\text{F.1})$$

où ρ est la masse volumique et \mathbf{v} la vitesse du fluide. Le bilan d'énergie totale s'écrit (? , Ch. 3),

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(u + 1/2 v^2) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}(u + 1/2 v^2) + \nabla \cdot (\mathbf{q} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{v}) - \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{F.2})$$

où u est l'énergie interne, v le module de la vitesse, \mathbf{q} le flux de chaleur, \mathbb{T} le tenseur des contraintes avec $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{V}$ où p est la pression et \mathbb{V} est la partie visqueuse du tenseur des contraintes, et \mathbf{F} représente les forces de volume.

4.1 Bilan de masse

Intégrons le bilan de masse local (F.1) sur un volume fixe V imperméable sur toute sa surface à l'exception de son orifice de sortie dont la section droite est notée S . On obtient,

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (\text{F.3})$$

Puisque le volume V est fixe, le premier terme de cette équation peut être transformé simplement par la règle de Leibniz,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{d}{dt} V \langle \rho \rangle_3 \quad (\text{F.4})$$

où $\langle \rho \rangle_3$ représente la moyenne spatiale de la masse volumique sur l'étendue du réservoir. On a simplement,

$$\langle \rho \rangle_3 = \langle X_V \rho_V + X_L \rho_L \rangle_3 = R_{V3} \langle \rho_V \rangle_3 + R_{L3} \langle \rho_L \rangle_3, \quad (\text{F.5})$$

où X_k est la fonction indicatrice de phase, R_{k3} représente la fraction du volume V occupé par la phase k et $\langle \rho_k \rangle_3$ est la masse volumique moyenne sur la phase fraction du réservoir occupé par la phase k .

On notera que,

$$S \langle \rho \rangle_3 = M = M_V + M_L, \quad (\text{F.6})$$

où M est la masse contenue dans le volume V . Le second terme de (F.3) se transforme par le théorème de Gauss simplement puisque seule la surface S du volume V n'est pas imperméable,

$$\int_V \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = S \langle \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_2, \quad (\text{F.7})$$

où $\langle \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_2$ représente le débit masse sortant du volume S à travers l'orifice d'aire de section droite S . On a simplement,

$$\begin{aligned} S \langle \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_2 &= S \langle (X_V \rho_V \mathbf{v}_V + X_L \rho_L \mathbf{v}_L) \cdot \mathbf{n} \rangle_2 \\ &= S R_{V2} \langle \rho_V \mathbf{v}_V \cdot \mathbf{n} \rangle_2 + S R_{L2} \langle \rho_L \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{n} \rangle_2, \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

où chacun des deux derniers termes représente respectivement le débit masse de vapeur et de liquide quittant le réservoir. En notant, m , le débit masse on peut aussi obtenir,

$$S \llbracket \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_2 = m = m_V + m_L \quad (\text{F.9})$$

Compte tenu de ces définitions précises on obtient le résultat demandé,

$$\boxed{\frac{d}{dt} V \llbracket \rho \rrbracket_3 + S \llbracket \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_2 = 0, .} \quad (\text{F.10})$$

En introduisant la masse contenue dans le volume, M , et le débit masse sortant m définis précédemment, cette équation devient naturellement,

$$\frac{dM}{dt} + m = 0, \quad (\text{F.11})$$

ce qui est quand même le résultat attendu !

4.2 Bilan de d'énergie totale

En introduisant l'enthalpie $h = u + p/\rho$ et en séparant le tenseur des contraintes en partie visqueuse et pression, on met le bilan d'énergie totale sous la forme suivante,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(u + 1/2 v^2) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}(h + 1/2 v^2) + \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbb{V} \cdot \mathbf{v}) - \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{F.12})$$

Les différents termes de cette équation représentent respectivement la variation d'énergie interne du volume élémentaire, le flux sortant d'enthalpie totale à travers ce volume élémentaire, la puissance thermique apportée, la puissance des contraintes visqueuse et la puissance des forces de volume. En intégrant le bilan local d'énergie totale (F.12) et négligeant les forces de volume et la puissance des contraintes visqueuses on obtient,

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(u + 1/2 v^2) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}(h + 1/2 v^2) \right) dV = \int_V -\nabla \cdot \mathbf{q} dV, \quad (\text{F.13})$$

En pratiquant comme pour le bilan de masse et en appliquant le théorème de Gauss au membre de droite et en appelant δV la surface limitant le volume V , on obtient,

$$\frac{d}{dt} V \llbracket \rho(u + 1/2 v^2) \rrbracket_3 + S \llbracket \rho(h + 1/2 v^2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_2 = \int_{\delta V} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = P \quad (\text{F.14})$$

où P est la puissance de chauffage apportée au réservoir. En supposant que le fluide est globalement au repos dans le réservoir à l'exception du voisinage de l'orifice de sortie et en introduisant l'enthalpie totale, $h^T = h + 1/2 v^2$, et l'énergie interne totale $u^T = u + 1/2 v^2$, on a,

$$\boxed{\frac{d}{dt} V \llbracket \rho u^T \rrbracket_3 + S \llbracket \rho h^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_2 = P} \quad (\text{F.15})$$

ce qui est le résultat demandé. Si on peut négliger les effets cinétiques on remplace les quantités totales par le quantités ordinaires correspondantes. On notera de plus que,

$$\llbracket \rho u \rrbracket_3 = \llbracket X_V \rho_V u_V + X_L \rho_L u_L \rrbracket_3 = R_{V3} \langle \rho_V u_V \rangle_3 + R_{L3} \langle \rho_L u_L \rangle_3, \quad (\text{F.16})$$

En définissant l'énergie interne moyenne de chaque phase et du mélange par,

$$M_k u_k = V R_{k3} \langle \rho_k u_k \rangle_3, \quad M u = V \langle \rho u \rangle_3, \quad (\text{F.17})$$

on peut obtenir,

$$V \nless \rho u \nless_3 = Mu = M_V u_V + M_L u_L = M(xu_V + (1-x)u_L), \quad (\text{F.18})$$

où l'on a introduit le titre massique moyen de vapeur dans le réservoir par,

$$x = \frac{M_V}{M_V + M_L} \quad (\text{F.19})$$

On peut traiter les termes de flux de manière analogue en introduisant les quantités moyennes relatives au mélange,

$$\begin{aligned} S \nless \rho h^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \nless_2 &= S \nless (X_V \rho_V h_V^T \mathbf{v}_V + X_L \rho_L h_L^T \mathbf{v}_L) \cdot \mathbf{n} \nless_2 \\ &= SR_{V3} < \rho_V h_V^T \mathbf{v}_V \cdot \mathbf{n} >_2 + SR_{L3} < \rho_L h_L^T \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{n} >_2, \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

où les deux derniers termes représentent les débits d'enthalpie totale sortant de chaque phase. En introduisant également les enthalpies moyennes relatives à chaque phase et au mélange par,

$$m_k h_k^T = SR_{k2} < \rho_k h_k^T \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} >_2, \quad m h^T = S < \rho h^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} >_2, \quad (\text{F.21})$$

on obtient,

$$S \nless \rho h^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \nless_2 = m h^T = m_V h_V^T + m_L h_L^T = m(y h_V^T + (1-y) h_L^T), \quad (\text{F.22})$$

où l'on a défini le titre massique moyen dans la section par,

$$y = \frac{m_V}{m_V + m_L}. \quad (\text{F.23})$$

En définitive, le bilan d'énergie totale s'écrit,

$$\frac{d}{dt} Mu + m h^T = P, \quad (\text{F.24})$$

ce qui est également un résultat intuitif.

5 Fonctionnement accidentel d'un autocuiseur

5.1 Montée en pression initiale

Le bilan de masse sur l'autocuiseur fermé s'écrit d'après (F.11),

$$\frac{dM}{dt} = V \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{F.25})$$

où M est la masse contenue dans l'autocuiseur et ρ est sa masse volumique moyenne. En conséquence ρ est constant. Le bilan d'énergie totale s'écrit en raison de (F.24) et du bilan de masse (F.25),

$$\frac{d}{dt} Mu = M \frac{du}{dt} = P \quad (\text{F.26})$$

Car la masse contenue dans le réservoir est constante et où u est l'énergie interne (le liquide est globalement stagnant) et P est la puissance thermique fournie à l'autocuiseur. En considérant l'énergie interne dans le plan thermodynamique (p, ρ) et en utilisant que ρ est constant on obtient simplement,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_\rho \frac{du}{dt} = \frac{P}{M}. \quad (\text{F.27})$$

Les tables thermodynamiques fournies ne permettent pas de calculer directement cette dérivée partielle car elles sont établies dans le plan (p, T) . En considérant u fonction de p et T on a,

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p dT. \quad (\text{F.28})$$

En considérant que ρ est donné par l'équation d'état en fonction de p et T et qu'il est constant on a,

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT = 0. \quad (\text{F.29})$$

ce qui permet de calculer dT en fonction de dp . En reportant dans (F.28), on obtient pour cette évolution particulière,

$$du = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T - \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p} \right) dp. \quad (\text{F.30})$$

On montre ainsi que,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_\rho = \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T - \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p}. \quad (\text{F.31})$$

En reportant dans (F.27) on obtient le résultat demandé,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{P}{M \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_\rho}. \quad (\text{F.32})$$

T °C	P bar	ρ_L kg/m ³	h_L kJ/kg	u_L kJ/kg	T °C	P bar	ρ_L kg/m ³	h_L kJ/kg	u_L kJ/kg
20.	1.	998.23	83.93	83.83	20.	1.	998.23	83.93	83.83
20.	2.	998.28	84.02	83.82	22.	1.	997.79	92.29	92.19
20.	3.	998.32	84.12	83.81	24.	1.	997.32	100.66	100.56
20.	4.	998.37	84.21	83.81	26.	1.	996.80	109.03	108.93
20.	5.	998.41	84.30	83.80	28.	1.	996.24	117.39	117.29
					30.	1.	995.65	125.76	125.66

Tableau F.1: Extrait des tables de propriétés thermodynamiques de l'eau et de la vapeur (?) pour l'eau liquide au voisinage des conditions initiales, $p = 1\text{bar}$ et $T = 20^\circ\text{C}$.

En utilisant les données thermodynamiques du tableau F.1 et en approchant les dérivées partielles par des différences finies, on a,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T \approx \frac{83.80 - 83.83}{4 \cdot 10^5} 10^3 = -7,5 \cdot 10^{-5} \quad (\text{F.33})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p \approx \frac{125.66 - 83.83}{10} 10^3 = 4.18 \cdot 10^3 \quad (\text{F.34})$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \approx \frac{998.41 - 998.23}{4 \cdot 10^5} = 4.50 \cdot 10^{-7} \quad (\text{F.35})$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx \frac{995.65 - 998.23}{10} = -2.58 \cdot 10^{-1} \quad (\text{F.36})$$

où on aura bien noté que les enthalpies sont en kJ/kg, l'unité SI pour cette grandeur étant le J/kg. On a donc,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_\rho \approx -7.50 \cdot 10^{-5} + 4.18 \cdot 10^3 \frac{4.50 \cdot 10^{-7}}{2.58 \cdot 10^{-1}} = 7.22 \cdot 10^{-3}. \quad (\text{F.37})$$

où on observe que les effets de dilatation représentés par le second terme de (F.31) et (F.37) sont prépondérants devant ceux de compressibilité représentés par le premier terme. En reportant ces valeurs dans (F.32), on obtient,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{10^3}{998.23 \cdot 10^{-2}} \frac{1}{7.22 \cdot 10^{-3}} \approx 1.4 \cdot 10^4 = 0.14 \text{ bar/s}. \quad (\text{F.38})$$

5.2 Montée en température

D'après les résultats de la question précédente, on peut estimer la durée de la montée en pression de 1 à 5 bar, T_v , par,

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{\Delta p}{T_v}, \quad T_v = \frac{\Delta p}{\frac{dp}{dt}} = \frac{4 \cdot 10^5}{.14 \cdot 10^5} \approx 28.6 \text{ s} \quad (\text{F.39})$$

T °C	P bar	ρ_L kg/m ³	h_L kJ/kg	u_L kJ/kg	T °C	P bar	ρ_L kg/m ³	h_L kJ/kg	u_L kJ/kg
20.	5.	998.41	84.30	83.80	144.	5.	922.64	606.50	605.96
22.	5.	997.98	92.67	92.17	146.	5.	920.80	615.10	614.56
24.	5.	997.50	101.03	100.53	148.	5.	918.94	623.71	623.17
26.	5.	996.98	109.39	108.89	150.	5.	917.07	632.33	631.79
28.	5.	996.42	117.76	117.26	152.	5.	915.18	640.96	640.41
30.	5.	995.83	126.12	125.62	154.	5.	913.27	649.60	649.05

Tableau F.2: Extrait des tables de propriétés thermodynamiques de l'eau et de la vapeur (?) pour l'eau liquide à 5 bar au voisinage des conditions initiales de température, $T = 20^\circ\text{C}$ et des conditions de saturation, $T = 151.87^\circ\text{C}$.

En intégrant le bilan d'énergie (F.26) sur le temps T_v , ce qui se réduit à l'application directe du premier principe, on a,

$$\Delta u = \frac{PT_v}{M} = 2.86 \text{ kJ} \quad (\text{F.40})$$

Avec l'état initial donné par u à 1 bar et 20°C , on a,

$$u = 83.83 + 2.86 = 86.69 \text{ kJ}. \quad (\text{F.41})$$

En interpolant les données de la table F.2, on obtient la température atteinte, T_1 ,

$$T_1 = 20 + 2 \frac{86.69 - 83.80}{92.17 - 83.80} \approx 20.8^\circ\text{C}. \quad (\text{F.42})$$

On peut également pratiquer d'une façon directe et moins approchée en calculant directement l'évolution de l'énergie interne en fonction de la pression sachant que le processus est isochore (masse volumique constante). En considérant la table (F.2) et la relation entre u et ρ à 5 bar, on obtient l'énergie interne de l'état final,

$$u(5 \text{ bar}, \rho = 998.23) = 83.80 + (998.41 - 998.23) \frac{92.17 - 83.80}{998.41 - 997.98} \approx 87.01 \text{ kJ}, \quad (\text{F.43})$$

ce qui correspond à une variation d'énergie interne par rapport à l'état initial,

$$\Delta u = 87.01 - 83.83 = 3.18 \text{ kJ}, \quad (\text{F.44})$$

à comparer avec (F.40). En utilisant le bilan d'énergie interne (F.40), on obtient le temps de montée en pression par,

$$T_v = \frac{M}{P} \Delta u = \frac{998.23 \cdot 10^{-2}}{10^3} 3.18 \cdot 10^3 \approx 31.7 \text{ s}, \quad (\text{F.45})$$

ce qui est cohérent avec (F.39). La température atteinte s'obtient par interpolation de la table F.2 en considérant $u(T)$ à 5 bar,

$$T_1 = 20 + 2 \frac{87.01 - 83.80}{92.17 - 83.80} \approx 20.9 \text{ °C} \quad (\text{F.46})$$

ce qui est encore cohérent avec (F.42).

5.3 Décharge à pression constante

L'eau contenue dans l'autocuiseur n'a pas le temps de chauffer significativement avant l'ouverture de la soupape. Elle continue toutefois à chauffer après l'ouverture de la soupape et la dilatation de l'eau alimente un débit de fuite à travers la soupape.

P bar	T °C	h_L kJ/kg	h_V kJ/kg	v_L m ³ /kg	v_V m ³ /kg	s_L kJ/kg/K	s_V kJ/kg/K	c m/s
5.00	151.87	640.38	2748.62	1.0925E-03	.37486	1.8610	6.8214	4.56
4.90	151.11	637.10	2747.71	1.0917E-03	.38206	1.8533	6.8282	6.84
4.80	150.33	633.76	2746.78	1.0908E-03	.38956	1.8455	6.8351	9.13
4.70	149.55	630.37	2745.84	1.0899E-03	.39736	1.8375	6.8421	11.42
4.60	148.75	626.92	2744.86	1.0891E-03	.40548	1.8293	6.8493	13.71
4.50	147.94	623.42	2743.87	1.0882E-03	.41396	1.8211	6.8567	16.00
4.40	147.11	619.85	2742.85	1.0873E-03	.42281	1.8126	6.8642	18.30

Tableau F.3: Extrait des tables de propriétés thermodynamiques de l'eau et de la vapeur (?) pour l'eau et sa vapeur en équilibre thermodynamique (conditions de saturation). h est l'enthalpie, s , est l'entropie, v est le volume massique ($v = 1/\rho$), ρ est la masse volumique et c est la vitesse du son du modèle homogène pour une détente isentropique à partir du liquide saturé à 5 bar.

Le tableau F.3 permet de calculer les propriétés thermodynamique du fluide lorsque la température de saturation est atteinte. La masse volumique est alors égale à la masse volumique du liquide à saturation pour une pression de 5 bar : 915.33 kg/m³. La masse restante et la perte de masse ΔM sont donc,

$$M = V \rho_{L\text{sat}}(5\text{bar}) \approx 915.33 \cdot 10^{-2} = 9.153 \text{ kg}, \quad (\text{F.47})$$

$$\Delta M = V(\rho_L(1\text{bar}, 20^\circ\text{C}) - \rho_{L\text{sat}}(5\text{bar})) \approx 10^{-2}(998.23 - 915.33) = 0.829 \text{ kg}. \quad (\text{F.48})$$

La phase de décharge isobare est décrite par le bilan de masse et d'énergie totale,

$$\frac{dM}{dt} + m = 0 \quad (\text{F.49})$$

$$\frac{dMu}{dt} + mh = P \quad (\text{F.50})$$

$$(\text{F.51})$$

où M est la masse contenue dans l'autocuisseur, m est le débit masse de sortie et h est l'enthalpie moyenne du fluide sortant du récipient. On peut simplifier le bilan d'énergie en le combinant avec le bilan de masse multiplié par u . En considérant le plan thermodynamique (p, T) et que la pression est constante pendant la décharge, on a,

$$\frac{dM}{dt} + m = V \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} + m = 0, \quad (\text{F.52})$$

$$M \frac{du}{dt} + m(h - u) = V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} + m \frac{p}{\rho} = P. \quad (\text{F.53})$$

$$(\text{F.54})$$

Ces équations permettent de déterminer m et dT/dt ,

$$m \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p - \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{p}{\rho} \right) = -P \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (\text{F.55})$$

$$V \rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p - \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right) \frac{dT}{dt} = P. \quad (\text{F.56})$$

En introduisant l'enthalpie $h = u + p/\rho$, on a alors,

$$m \rho \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = -P \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (\text{F.57})$$

$$V \rho \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} = P. \quad (\text{F.58})$$

En approchant les dérivées thermodynamiques par différences finies à partir du tableau F.2, on a pour une température comprise entre 150 et 152 °C et une pression de 5 bar,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx \frac{915.18 - 917.07}{2} \approx -0.945 \text{ kg/m}^3, \quad (\text{F.59})$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = C_P \approx \frac{640.96 - 632.33}{2} 10^3 \approx 4135 \text{ J/kg}. \quad (\text{F.60})$$

On en déduit,

$$m \approx \frac{0.945 \cdot 10^3}{4135 \times 915.33} \approx 0.250 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s} \quad (\text{F.61})$$

$$\frac{dT}{dt} \approx \frac{10^3}{10^{-2} \times 915.33 \times 4135} \approx 0.0264 \text{ K/s} \quad (\text{F.62})$$

Si on considère que la dilatabilité et la chaleur spécifique à pression constante varie peu avec la température, on peut estimer la durée de la montée en température et la masse perdue,

$$T_P \approx \frac{\Delta T}{\frac{dT}{dt}} \approx \frac{151.87 - 20.7}{0.0264} \approx 4964 \text{ s} \quad (\text{F.63})$$

$$\Delta M \approx m T_P \approx 0.250 \cdot 10^{-3} \times 4964 \approx 1.24 \text{ kg} \quad (\text{F.64})$$

Cette dernière estimation est cohérente avec (F.48).

5.4 Dimensionnement de la soupape

La soupape de sécurité possède un orifice de sortie dont la section, S , est de 1 mm^2 et on désire vérifier qu'elle permet d'évacuer un débit masse de 0.25 g/s sous une pression de 5 bar .

On schématise la soupape par un conduit convergent. Les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale sur ce conduit en écoulement permanent pour le modèle homogène sont les suivantes.

$$\frac{d}{dz} S \rho w = 0 \quad (\text{F.65})$$

$$\frac{d}{dz} S \rho w^2 + S \frac{dp}{dz} = -\mathcal{P} \tau \quad (\text{F.66})$$

$$\frac{d}{dz} S \rho w \left(h + \frac{1}{2} w^2 \right) = \mathcal{P} q \quad (\text{F.67})$$

où ρ est la masse volumique du mélange, w est la vitesse moyenne du mélange et aussi la vitesse moyenne de chaque phase, \mathcal{P} est le périmètre de la conduite, τ est la contrainte de frottement en paroi et q est le flux de chaleur apporté au conduit.

Le bilan de masse s'intègre. Le bilan de quantité de mouvement peut être simplifié en le combinant au bilan de masse. De même on peut éliminer la vitesse dans le bilan d'énergie totale en utilisant le bilan de quantité de mouvement. On obtient,

$$S \rho w = m \quad (\text{F.68})$$

$$m \frac{d}{dz} w + S \frac{dp}{dz} = -\mathcal{P} \tau \quad (\text{F.69})$$

$$m \frac{dh}{dz} - \frac{m}{\rho} \frac{dp}{dz} = \mathcal{P} q + \mathcal{P} \tau w \quad (\text{F.70})$$

En considérant la relation de Gibbs, $T ds = dh - dp/\rho$, on observe que la dernière équation représente le bilan d'entropie. Le système d'équation équivalent au précédent est formé par le bilan de masse, d'énergie totale et d'entropie et il s'écrit,

$$S \rho w = m \quad (\text{F.71})$$

$$m \frac{d}{dz} \left(h + \frac{1}{2} w^2 \right) = \mathcal{P} q \quad (\text{F.72})$$

$$m T \frac{ds}{dz} = \mathcal{P} q + \mathcal{P} \tau w \quad (\text{F.73})$$

Si l'écoulement est adiabatique, $q = 0$, et sans frottement, $\tau = 0$, les équations précédentes s'intègrent pour donner,

$$m = S \rho w, \quad (\text{F.74})$$

$$h_0 = h + \frac{1}{2} w^2, \quad (\text{F.75})$$

$$s_0 = s. \quad (\text{F.76})$$

où l'indice 0 représente les conditions génératrices de la détente, c'est à dire celle correspondant au liquide contenu dans l'autocuisseur : du liquide à saturation à 5 bar . Lors de la détente dans la soupape, le liquide va s'autovaporiser car la pression devient inférieure à la pression de saturation. On introduit ensuite les quantités relatives au mélange,

$$\frac{1}{\rho}(x, p) = \frac{x}{\rho_V(p)} + \frac{1-x}{\rho_L(p)} = v(x, p) = x v_V(p) + (1-x) v_L(p) \quad (\text{F.77})$$

$$h(x, p) = x h_V(p) + (1-x) h_L(p), \quad (\text{F.78})$$

$$s(x, p) = x s_V(p) + (1-x) s_L(p), \quad (\text{F.79})$$

P bar	x -	h kJ/kg	w m/s	ρ kg/m ³	G kg/m ² /s	c m/s
5.00	.0000	640.38	.00	915.3	.0	4.56
4.90	.0015	640.37	5.26	594.5	3128.7	6.84
4.80	.0031	640.35	8.21	434.4	3568.6	9.13
4.70	.0047	640.32	10.95	338.5	3707.7	11.42
4.60	.0063	640.29	13.63	274.6	3744.0	13.71
4.50	.0079	640.25	16.31	229.0	3734.7	16.00
4.40	.0096	640.20	18.99	194.9	3702.0	18.30

Tableau F.4: Evolution du débit à la sortie de la soupe en fonction de la pression de sortie, P . Les autres valeurs calculées à la sortie de la soupape sont : le titre massique x , l'enthalpie, h , la vitesse, w , la masse volumique du mélange, ρ , La vitesse massique, G et la vitesse du son du modèle homogène.

où x est le titre thermodynamique à l'équilibre égal au titre massique de l'écoulement dans le cas particulier du modèle homogène à l'équilibre (HEM) et p est la pression.

On paramètre la décharge par la pression de sortie de l'orifice, p . Le bilan d'entropie (F.76) et la définition de l'entropie du mélange (F.79), permettent de calculer le titre de l'écoulement en sortie,

$$x = \frac{s_0 - s_L(p)}{s_V(p) - s_L(p)}. \quad (\text{F.80})$$

Le titre x et la pression p étant connus, on calcule la vitesse de sortie de l'écoulement par le bilan d'énergie (F.75),

$$w = \sqrt{2(h_0 - h)}, \quad (\text{F.81})$$

où l'enthalpie du mélange, h , est donnée par (F.78). On calcule enfin la masse volumique du mélange par (F.77), puis la vitesse massique de sortie,

$$G = \rho w = \frac{w}{v}. \quad (\text{F.82})$$

Les valeurs numériques correspondant aux états de sortie donnés au tableau F.3 sont données au tableau F.4. Un graphe plus détaillé est donné à la figure F.1. On observe que lorsque la pression aval diminue, le débit commence par augmenter jusqu'à 4,6 bar, puis il décroît lorsque l'on continue à diminuer la pression. Le débit maximum est atteint aux alentours de 4,6 bar et vaut $G \approx 3750 \text{ kg/m}^2/\text{s}$. Ce débit est le débit critique recherché.

A l'annexe F on établit la procédure de calcul du débit critique et on fournit ses valeurs exactes pour des conditions d'enceinte en liquide saturé. Pour une pression d'enceinte de 5 bar, on obtient (tableau F.5),

$$G_c = 3744,8 \text{ kg/m}^2/\text{s}, \quad P_c = 4,580 \text{ bar} \quad (\text{F.83})$$

Ces valeurs sont cohérentes avec celles données au tableau F.4. On observe notamment que lorsque le maximum de débit est atteint, la vitesse du fluide est égale à la vitesse du son. C'est en effet ce critère qui, comme écoulement monophasique, permet de caractériser le débit critique (voir annexe F).

Le débit masse maximal pouvant traverser la soupape de section $S = 1 \text{ mm}^2$ est donné par,

$$m_c = SG_c = 3,75 \text{ g/s}. \quad (\text{F.84})$$

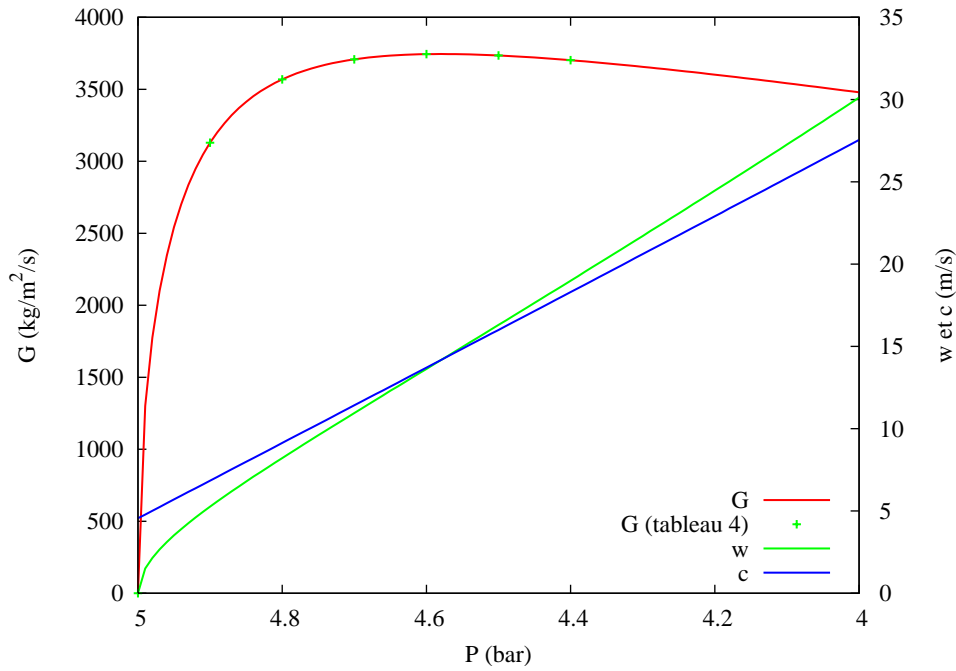


Figure F.1: Evolution de la vitesse massique, G , de la vitesse du mélange, w et de la vitesse du son du modèle homogène, c , à la sortie de la soupe en fonction de la pression de sortie, P . Le trait continu représente la solution numérique développée dans l'annexe F et les symboles représentent les calculs reportés au tableau (F.4).

Le débit à évacuer pour maintenir la pression constante qui a été calculé précédemment était de 0,25 g/s pour une puissance de chauffage de 1kW. Il peut donc être évacué sans problème à travers la soupape. En revanche l'équation (F.57) montre que le débit à évacuer est proportionnel à la puissance de chauffage, P . En conséquence pour une puissance de 15 kW il faudrait évacuer un débit de 3,75 g/s ce qui est exactement la limite de débit critique. Pour une puissance de chauffage supérieure, la soupape serait sous-dimensionnée et n'assurerait donc pas sa fonction de sécurité.

Le dimensionnement est donc correct. En effet, la puissance thermique apportée par exemple par un réchaud électrique est de l'ordre de quelques kW à laquelle il faudrait soustraire la puissance perdue par les parois latérales et le couvercle de l'autocuiseur par convection naturelle de l'air qui l'entoure. La solution proposée ici est donc sûre.

6 Fonctionnement nominal de l'autocuiseur

6.1 Bilans de masse

Le bilan de masse local pour chaque phases s'écrit,

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v}_k = 0. \quad (\text{F.85})$$

On l'intègre sur le volume V_k occupé par la phase k . On a $V_L \cup V_V = V$ et on obtient,

$$\int_{V_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v}_k \right) dV = I_1 + I_2 = 0. \quad (\text{F.86})$$

Le premier terme se traite par la règle de Leibniz et donne,

$$I_1 = \frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho_k dV - \int_{A_i} \rho_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k dA, \quad (\text{F.87})$$

car A_i est la seule frontière de V_k potentiellement mobile, les deux autres comme S_k et ∂V_k étant fixes. De ces trois parties de la frontière seule ∂V_k est imperméable. Les deux autres contribuent donc au théorème de Gauss. Le second terme se transforme alors en,

$$I_2 = \int_{A_i} \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k dA + \int_{S_k} \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{F.88})$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure à V . En sommant (F.87) et (F.88), on obtient l'équation demandée,

$$\frac{dM_k}{dt} + \Gamma_k + m_k = 0 \quad (\text{F.89})$$

où

$$M_k = \int_{V_k} \rho_k dV, \quad (\text{F.90})$$

représente la masse de la phase k contenue dans le volume V (ou V_k),

$$\Gamma_k = \int_{A_i} \rho_k (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_k dA = \int_{A_i} \dot{m}_k dA \quad (\text{F.91})$$

représente la masse perdue par la phase k en raison du changement de phase et,

$$m_k = \int_{S_k} \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} dA, \quad (\text{F.92})$$

représente le débit masse de la phase k sortant du volume V par l'orifice de sortie. En considérant le bilan de masse à l'interface,

$$\dot{m}_L + \dot{m}_V = 0, \quad (\text{F.93})$$

que l'on peut intégrer sur l'interface, A_i , on obtient,

$$\Gamma_L + \Gamma_V = 0. \quad (\text{F.94})$$

En sommant les deux équations (F.89), on retrouve bien le bilan de masse du mélange,

$$\frac{dM}{dt} + m = 0, \quad (\text{F.95})$$

où $M = M_L + M_V$ est la masse totale des deux phases et $m = m_L + m_V$ est le débit masse total sortant par l'orifice de sortie S .

6.2 Bilans d'énergie

Le bilan d'énergie total dans sa forme locale s'écrit,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_k (u_k + 1/2 v_k^2) + \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v}_k (h_k + 1/2 v_k^2) + \nabla \cdot (\mathbf{q}_k + \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{v}_k) - \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k = 0, \quad (\text{F.96})$$

où chaque terme représente respectivement, la variation d'énergie interne totale de l'élément de volume, le flux d'enthalpie totale sortant de cet élément de volume, la puissance thermique sortant par conduction, la puissance des contraintes visqueuses appliquées au volume élémentaire et la puissance des forces de volume. Les phases étant stagnantes, l'énoncé suggère de négliger l'effet des contraintes visqueuses (pas ou peu d'écoulement), des forces de volume et la variation d'énergie cinétique (phases stagnantes). L'équation se simplifie en,

$$\frac{\partial \rho_k u_k}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_k h_k \mathbf{v}_k + \nabla \cdot \mathbf{q}_k = 0. \quad (\text{F.97})$$

En intégrant cette équation sur V_k , on obtient,

$$\int_{V_k} \left(\frac{\partial \rho_k u_k}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_k h_k \mathbf{v}_k + \nabla \cdot \mathbf{q}_k \right) dV = J_1 + J_2 + J_3 = 0 \quad (\text{F.98})$$

Le premier terme se traite par la règle de Leibniz et en faisant apparaître l'enthalpie on a,

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho_k u_k dV - \int_{A_i} \rho_k u_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k dA \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V_k} \rho_k u_k dV - \int_{A_i} \rho_k h_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k dA + \int_{A_i} p_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k dA. \end{aligned} \quad (\text{F.99})$$

Le deuxième terme se traite par le théorème de Gauss où on notera que ∂V_k est imperméable,

$$J_2 = \int_{A_i} \rho_k h_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k dA + \int_{S_k} \rho_k h_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{F.100})$$

Le troisième terme se traite de façon analogue. On notera que des trois surfaces limitant ∂V_k on néglige le flux de chaleur conductif dans traversant S_k ,

$$J_3 = \int_{A_i} \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k dA + \int_{\partial V_k} \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{F.101})$$

En sommant ces trois contributions, on obtient l'équation recherchée,

$$\frac{dU_k}{dt} + H_{ki} + P_{ki} + \dot{H}_k + P_k = 0, \quad (\text{F.102})$$

où,

$$U_k = \int_{V_k} \rho_k u_k dV, \quad (\text{F.103})$$

représente l'énergie interne de la phase k , et

$$\begin{aligned} H_{ki} &= \int_{A_i} \rho_k h_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k dA - \int_{A_i} \rho_k h_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k dA + \int_{A_i} p_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k dA \\ &= \int_{A_i} \dot{m}_k h_k dA + \int_{A_i} p_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k dA, \end{aligned} \quad (\text{F.104})$$

représente le débit d'enthalpie sortant de la phase k résultant du changement de phase. On montrera plus loin que le second terme peut être regroupé avec un autre terme si la pression est constante, il représente la puissance des contraintes de pression appliquées à l'interface,

$$P_{ki} = \int_{A_i} \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k dA, \quad (\text{F.105})$$

représente la puissance thermique sortant de la phase k ,

$$\dot{H}_k = \int_{S_k} \rho_k h_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} dA, \quad (\text{F.106})$$

représente le débit d'enthalpie quittant V par l'orifice de sortie et

$$P_k = \int_{\partial V_k} \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n} dA, \quad (\text{F.107})$$

représente la puissance thermique quittant la phase k par les parois. C'est l'opposé de la puissance thermique apportée à la phase k de l'extérieur.

On rappelle que le bilan d'énergie totale à l'interface exprimé dans les mêmes hypothèses que pour le bilan local simplifié (F.97), s'écrit (? , equation 3.115),

$$\sum_{k=L,G} \dot{m}_k h_k + \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k + p_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k = 0. \quad (\text{F.108})$$

En intégrant cette équation sur l'interface on obtient,

$$\sum_{k=L,G} H_{ki} + P_{ki} = 0. \quad (\text{F.109})$$

En sommant les deux équations phasiques (F.102) on retrouve le bilan d'énergie du mélange,

$$\frac{dU}{dt} + \dot{H} + P = 0 \quad (\text{F.110})$$

où $U = U_L + U_V$ représente l'énergie interne de mélange, $\dot{H} = \dot{H}_L + \dot{H}_V$ représente le débit d'enthalpie sortant par l'orifice S et $P = P_L + P_V$ représente l'opposé de la puissance thermique apportée de l'extérieur au volume V . On notera que les conventions de signe relative à la puissance thermique diffèrent de celle de l'équation (F.15).

6.3 Simplification des bilans

S'il ne sort que de la vapeur de l'autocuisseur, alors $m_L=0$. En raison du bilan de masse à l'interface, la production de vapeur est exactement compensée par la disparition du liquide, $\Gamma = \Gamma_L = -\Gamma_V$. En conséquence les deux bilans de masse s'écrivent,

$$\frac{dM_L}{dt} + \Gamma = 0 \quad (\text{F.111})$$

$$\frac{dM_V}{dt} - \Gamma + m_V = 0 \quad (\text{F.112})$$

Le régime permanent n'est pas possible si on n'alimente pas le dispositif en liquide pour compenser la perte de masse globale. Le premier terme de (F.112) représente l'augmentation de la masse de vapeur dans l'autocuisseur compensant la disparition de du liquide. Si on appelle T le temps nécessaire à la vaporisation complète du liquide ($T \approx M_{L0}/h_{LV}$, où M_{L0} représente la masse d'eau initiale) l'ordre de grandeur de ce terme est $\rho_V V/T$. Le troisième terme représente le débit masse sortant de l'autocuisseur, son ordre de grandeur est $\rho_L V/T$, il est donc beaucoup plus grand. En première approximation ($\rho_L \gg \rho_V$), on a donc,

$$m_V \approx \Gamma \quad (\text{F.113})$$

qui signifie que toute la vapeur qui sort de l'autocuisseur a été produite à l'interface.

La vapeur est globalement isotherme et n'est pas chauffée directement. L'énoncé suggère de la considérer comme adiabatique donc $P_V = 0$ et $P_{Vi} = 0$. Il ne sort que de la vapeur du dispositif donc $\dot{H}_L = 0$. La puissance thermique P n'est apportée qu'au liquide, on a alors $P = -P_L$. En supposant les grandeurs uniformes, ou en définissant les grandeurs moyennes appropriées, on a,

$$U_k = M_k u_k, \quad (\text{F.114})$$

$$\dot{H}_V = m_V h_V. \quad (\text{F.115})$$

$$H'_{ki} = \int_{A_i} \dot{m}_k h_k dA = \Gamma_k h_k \quad (\text{F.116})$$

Sous ces hypothèses on a,

$$\frac{d}{dt} M_L u_L + H_{Li} + P_{Li} = P, \quad (\text{F.117})$$

$$\frac{d}{dt} M_V u_V + H_{Vi} + m_V h_V = 0. \quad (\text{F.118})$$

De plus en appliquant la règle de Leibniz à la pression p_k que l'on suppose constante on obtient,

$$\frac{d}{dt} M_k \frac{p_k}{\rho_k} = \int_{V_k} \rho_k \frac{p_k}{\rho_k} dV = \int_{A_i} p_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k dA \int_{V_k} \frac{\partial p_k}{\partial t} dV. \quad (\text{F.119})$$

En conséquence,

$$\frac{d}{dt} M_k u_k + H_{ki} = \frac{d}{dt} M_k h_k + H'_{ki}, \quad (\text{F.120})$$

ce qui permet d'obtenir,

$$\frac{d}{dt} M_L h_L + \Gamma h_L + P_{Li} = P, \quad (\text{F.121})$$

$$\frac{d}{dt} M_V h_V - \Gamma h_V + m_V h_V = 0. \quad (\text{F.122})$$

En combinant chacune de ces équations avec les bilans de masse correspondants (F.111) et (F.112), on obtient,

$$M_L \frac{dh_L}{dt} + P_{Li} = P, \quad (\text{F.123})$$

$$M_V \frac{dh_V}{dt} = 0. \quad (\text{F.124})$$

Puisque l'on a supposé que chaque phase reste à saturation, les termes différentiels sont nuls et l'équation (F.124) est identiquement vérifiée. On en déduit que toute la puissance thermique apportée au liquide est transférée à l'interface pour permettre le changement de phase.

$$P_{Li} = P. \quad (\text{F.125})$$

On notera que si P_{Vi} avait été non nul cette puissance aurait contribué à la surchauffe de la vapeur. Il était donc cohérent de la supposer nulle.

6.4 Bilans aux interfaces

Les quatre équations de bilan ne permettent pas à elles seules de répondre à la question posée car le changement de phase a lieu à l'interface. En considérant le bilan d'énergie à l'interface (F.108), on remarquera que le dernier terme disparaît si on néglige le saut de pression à l'interface. En conséquence,

$$\sum_{k=L,G} H_{ki} + P_{ki} = \sum_{k=L,G} H'_{ki} + P_{ki} = \Gamma h_L - \Gamma h_V + P_{Li} = 0. \quad (\text{F.126})$$

En tenant compte du bilan de masse approché à l'interface (F.113) et de la conclusion de la discussion des bilans d'énergie (F.125), on obtient le bilan recherché,

$$\Gamma(h_V - h_L) = P \approx m_V(h_V - h_L). \quad (\text{F.127})$$

Toute la puissance thermique apportée est consommée à l'interface pour produire de la vapeur. Cette condition est exacte pour les hypothèses considérées. L'approximation suivante devient une égalité si on ré-alimente l'autocuiseur en liquide pour compenser la perte de masse totale, auquel cas M_V et M_L seraient constants et $\Gamma = m_V$. Dans le cas contraire cette dernière relation n'est qu'une très bonne approximation de la réalité puisqu'elle a été obtenue sous l'hypothèse que $\rho_L \gg \rho_V$.

Vitesse du son du modèle homogène et débit critique

Il y a trois façons équivalentes de calculer le débit critique correspondant au modèle d'écoulement considéré et celui du modèle homogène en particulier. Dans ce dernier cas le calcul est formellement identique à la démarche utilisée en écoulement monophasique compressible (?). On peut obtenir cette information aussi bien à partir de l'analyse des vitesses de propagation du système que de l'analyse des points stationnaires du modèle permanent (?).

L'analyse de la propagation des petites perturbations s'effectue à partir des équations de bilan monodimensionnelles instationnaires qui s'écrivent,

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} S \rho w = 0 \quad (\text{F.128})$$

$$S \frac{\partial}{\partial t} \rho w + \frac{\partial}{\partial z} S \rho w^2 + S \frac{\partial p}{\partial z} = -\mathcal{P}\tau \quad (\text{F.129})$$

$$S \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} S \rho w \left(h + \frac{1}{2} w^2 \right) = -\mathcal{P}q \quad (\text{F.130})$$

où $u = h - p/\rho$ est l'énergie interne du mélange. On combine le bilan de quantité de mouvement (F.129) avec le bilan de masse (F.128) pour faire sortir $S\rho w$ des termes différentiels. Puis on combine le bilan d'énergie (F.130) avec le bilan de quantité de mouvement (F.129) pour en éliminer la vitesse. Dans les équations obtenues, on élimine ρ et h pour ne conserver que les variables indépendantes w , x et p . Soit \mathbf{X} le vecteur formé par ces variables, on obtient le système différentiel suivant,

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} = \mathbf{C}, \quad (\text{F.131})$$

où les matrices et vecteurs sont définis par

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \rho'_x & \rho'_p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & h'_x & h'_p \end{pmatrix}, \quad (\text{F.132})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \rho & w\rho'_x & w\rho'_p \\ w & 0 & 1/\rho \\ 0 & wh'_x & w(h'_p - 1/\rho) \end{pmatrix}, \quad (\text{F.133})$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{S'}{S} \rho w \\ -\frac{\mathcal{P}\tau}{S\rho} \\ \frac{\mathcal{P}q + \mathcal{P}\tau w}{S\rho} \end{pmatrix} \quad (\text{F.134})$$

L'analyse des propagations dans l'hypothèse des grandes longueurs d'ondes est traité par exemple par ?, Problème résolu 2004, section 5.9 et on montre que la vitesse, a , des ondes est donnée par l'équation de dispersion,

$$\det(a\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0. \quad (\text{F.135})$$

En effectuant le calcul on obtient,

$$\det(a\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -(w - a) \left\{ h'_x - (w - a)^2 \left[h'_x \rho'_p - \rho'_x \left(h'_p - \frac{1}{\rho} \right) \right] \right\}. \quad (\text{F.136})$$

Cette équation possède trois racines réelles, de la forme $a = w, w + c, w - c$, où c est la vitesse de propagation du modèle considéré et donnée par,

$$c^2 = \frac{h'_x}{h'_x \rho'_p - \rho'_x h'_p + \rho'_x / \rho}. \quad (\text{F.137})$$

On considère classiquement que l'écoulement devient critique lorsque les variations de pression aval ne peuvent plus se propager vers l'amont du système. En effet, lorsque la pression baisse à l'aval des ondes remontent l'écoulement en emportant cette information et le débit augmente pour satisfaire la condition aux limites aval (caractéristique tournée vers l'amont de vitesse $w - c$). Cette situation n'est possible que tant qu'en tout point de l'écoulement la vitesse de l'écoulement reste inférieure à la vitesse de propagation c . On dit alors que l'écoulement est subsonique. Dès qu'en un point la vitesse de l'écoulement atteint la vitesse du son c , la propagation y est bloquée et l'information ne peut plus atteindre l'amont et le débit ne varie plus lorsque l'on continue à diminuer la pression aval. On dit alors que l'écoulement est critique en ce point. La condition de blocage du débit est donc donnée par,

$$w = c. \quad (\text{F.138})$$

L'analyse des points stationnaire du système stationnaire fournit une condition identique. En effet pour que le système différentiel stationnaire

$$\mathbf{B} \frac{d\mathbf{X}}{dz} = \mathbf{C} \quad (\text{F.139})$$

admette un point stationnaire, il faut que $\det(\mathbf{B}) = 0$. Cette condition est identique à $a = 0$ dans (F.135) et fournit encore $w = c$.

La méthode directe consiste à déterminer la condition d'extremum de G donné implicitement par (F.75) et (F.76) en considérant le plan thermodynamique (x, p) ,

$$s_0 = s(x, p), \quad (\text{F.140})$$

$$h_0 = h(x, p) + \frac{1}{2}G^2v^2. \quad (\text{F.141})$$

On différencie (F.141) pour trouver la condition d'extremum,

$$Gv^2dG = -vG^2(v'_x dx + v'_p dp) - h'_x dx - h'_p dp \quad (\text{F.142})$$

Pour éliminer dx on différencie (F.140) pour trouver,

$$dx = -\frac{s'_p}{s'_x} dp. \quad (\text{F.143})$$

En utilisant la relation de Gibbs, $Tds = dh - vdp$ et en revenant au plan thermodynamique (x, p) , on a,

$$Tds = h'_x dx + (h'_p - v)dp, \quad (\text{F.144})$$

d'où l'on déduit,

$$\frac{s'_p}{s'_x} = \frac{h'_p - v}{h'_x}. \quad (\text{F.145})$$

En reportant (F.145) dans (F.143) puis en se servant de la relation obtenue pour éliminer dx , on obtient,

$$GvdG = \left(-\frac{G^2}{h'_x} (v'_x(v - h'_p) + v'_p h'_x) - 1 \right) dp. \quad (\text{F.146})$$

La condition d'extremum de $G(p)$ est donc,

$$G^2 = \frac{-h'_x}{v'_x(v - h'_p) + v'_p h'_x} = \frac{\rho^2 h'_x}{\rho'_p h'_x + \rho'_x (1/\rho - h'_p)}. \quad (\text{F.147})$$

P_0	P_c	G_c	c
bar	bar	kg/m ² /s	m/s
1.0	.956582	1005.4	5.131
2.0	1.883827	1786.7	7.930
3.0	2.794232	2486.4	10.249
4.0	3.692076	3134.4	12.301
5.0	4.579716	3744.8	14.175
6.0	5.458679	4325.7	15.919
7.0	6.330062	4882.5	17.561
8.0	7.194679	5419.0	19.121
9.0	8.053178	5937.8	20.613
10.0	8.906071	6441.1	22.047

Tableau F.5: Evolution du débit critique, G_c et de la pression critique P_c du modèle homogène à l'équilibre en fonction de la pression amont, P_0 , pour des conditions de liquide saturé dans l'enceinte ($x_0 = 0$).

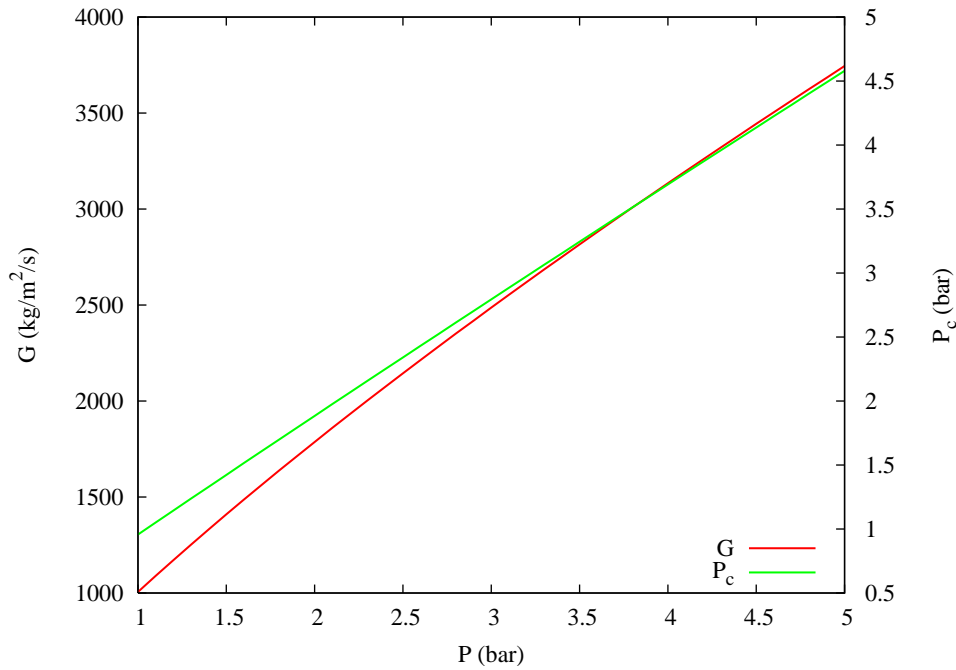


Figure F.2: Evolution du débit, G_c et de la pression critique P_c en fonction de la pression amont, P_0 , pour des conditions de liquide saturé dans l'enceinte ($x_0 = 0$).

Calcul : CFHEM01.for, graphe : CFHEM01.plt, données : CFHEM01.out

Il est clair que cette condition est encore équivalente à $w = c$ ce qui montre bien que lorsque les propagations sont bloquées en un point de l'écoulement, le débit considéré comme fonction de la pression aval atteint un extremum.

En résolvant l'équation $w = c$ pour h_0 et s_0 donnés, on obtient la pression critique, c'est à dire celle pour laquelle le débit est maximum. La méthode de Newton converge vite (3 itérations environ) et convient donc à la résolution de cette équation comme le suggère la quasi linéarité de $w - c$ avec la pression p au voisinage de p_c (voir figure F.1). On obtient les résultats indiqués au tableau F.5 et à la figure F.2.

Références

- Aris, R. 1962. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Prentice-Hall.
- Batchelor, G. K. 1967. *An introduction to fluid mechanics*. Cambridge University Press.
- Bergles, A.E, Collier, J. G., Delhay, J. M., Hewitt, G. F., & Mayinger, F. 1981. *Two-phase flow and heat transfer in the power and process industries*. Hemisphere.
- Bilicki, Z., Dafermos, C., Kestin, J., Majda, J., & Zeng, D. L. 1987. Trajectories and singular points in steady-state models of two-phase flows. *Int. J. Multiphase Flow*, **13**, 511–533.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. 1960. *Transport phenomena*. Wiley.
- Camelo-Cavalcanti, E. S. 1993. *Caracterização de Escamento Bifásico Ar-água, Disperso e Crítico, em Bocal Convergente-Divergente*. Ph.D. thesis, Université Fédérale de Rio de Janeiro (COPPE/UFRJ), Brésil.
- Candel, S. 1990. *Mécanique des fluides*. Dunod.
- Coutris, N. 1993. Balance equations for fluid lines, sheets, filaments and membranes. *Int. J. Multiphase Flow*, **19**(4), 611–637.
- de Gennes, P. G., Brochard-Wyart, F., & Quéré, D. 2002. *Gouttes, bulles perles et ondes*. Belin.
- Delhay, J. M. 1974. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems, local instant formulation. *Int. J. Multiphase Flow*, **1**, 359–409.
- Delhay, J. M. 19XX. Transferts de chaleur associés à l'ébullition ou à la condensation des corps purs. *Les techniques de l'ingénieur*, A 1560–1–A 1561–5.
- Delhay, J. M., & Achard, J. L. 1976. On the averaging operators introduced in two-phase flow modelling. *Proc. of the OCDE-NEA specialists' meeting on transient two-phase flow*. Toronto, Canada, Aug. 3-4.
- Delhay, J. M., Giot, M., & Riethmuller, M. L. 1981. *Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering*. Hemisphere and McGraw Hill.
- Donedu, A. 1981. *Géométrie différentielle et intégrales multiples*. Vuibert.
- Dukler, A. E., & Tailleur, Y. 1986. *Multiphase Science and Technology*. Vol. 2. Hemisphere. Chap. 1: Flow pattern transitions in gas-liquid systems: measurement and modelling, pages 1–94.
- Gyarmathy, G. 1982. *Multiphase Science and Technology*. Vol. 1. McGraw-Hill Book Company. G.F. Hewitt, J.M. Delhay and N. Zuber, Eds. Chap. 2, The spherical droplet in gaseous carrier streams: review and synthesis.
- Haar, L., Gallagher, J. S., & Kell, G. S. 1984. *NBS/NRC Steam tables: Thermodynamic and transport properties and computer programs for vapor and liquid state of water in SI units*. Hemisphere and McGraw-Hill.

- Hartland, S., & Hartley, R. W. 1976. *Axisymmetric fluid-liquid interfaces*. Elsevier.
- Hetsroni, G. 1982. *Handbook of multiphase systems*. McGraw Hill.
- Irvine, T. F., & Liley, P. E. 1984. *Steam and gas tables with computer equations*. Academic Press.
- Ishii, M. 1975. *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*. Eyrolles.
- Jérémie, S. 1998. *Refroidissement par injection d'eau d'un gaz chaud circulant dans une ligne de détente*. Ph.D. thesis, Ecole Centrale Paris, Chatenay-Malabry, France. (Confidentiel).
- Kestin, J., & Zaremba, S. K. 1953. One-dimensional high-speed flows. *Aircraft Engineering*, June, 1–5.
- Koehler, S. A., Hilgenfeldt, S., & Stone, H. A. 2000. A generalized view of foam drainage: experiment and theory. *Langmuir*, **16**, 6327–6341.
- Landau, L., & Lifchitz, E. 1971. *Mécaniques des fluides*. MIR.
- Lemaire, C. 1999. *Caractérisation et modélisation du blocage de débit en écoulement dispersé à deux constituants en géométrie tridimensionnelle*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France.
- Lemonnier, H. 2001. *Croissance et effondrement d'une bulle de vapeur selon le modèle de Plesset et Zwick (1954)*. Tech. rept. SMTH/LDTA/2001-025. CEA/Grenoble, Grenoble, France.
- Lemonnier, H. 2002. *Two-fluid-1D-averaged model equations for a pipe undergoing arbitrary motions*. Tech. rept. SMTH/LDTA/2002-043. CEA/Grenoble, Grenoble, France.
- Lemonnier, H., & Bilicki, Z. 1994. *Multiphase Science and Technology*. Vol. 8. Begell House. G.F. Hewitt, J.M. Delhay and N. Zuber, Eds. Chap. 6, Steady two-phase choked flow in channels of variable cross sectional area.
- Lemonnier, H., & Selmer-Olsen, S. 1992. Experimental investigation and physical modelling of two-phase two-component flow in a converging-diverging nozzle. *International Journal of Multiphase Flow*, **18**(1), 1–20.
- Van Dyke, M. 1975. *Perturbation methods in fluid mechanics*. Parabolic Press.
- Perry, R. H., & Green, D. W. (eds). 1984. *Perry's chemical engineers' handbook*. 6th edn. McGraw-Hill.
- Polezhaev, V.I., & Ermakov, M.K. 1992. Thermosolutal Marangoni convection short-time regimes: proposal for drop tower experiments and real time computer simulation. *Micro-gravity sci. technol.*, **5**(3), 172–175.
- Pouvreau, J. 2002. *Contribution à la modélisation de l'efficacité de la décontamination par mousse liquide : étude expérimentale et théorique de l'écoulement de la mousse et du film liquide formé en paroi*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992. *Numerical recipes in Fortran*. Second edn. Cambridge University Press.
- Schmidt, E. 1982. *Properties of water and steam in SI-Units*. third, enlarged edn. Springer-Verlag.

- Selmer-Olsen, S. 1991. *Etude théorique et expérimentale des écoulements diphasiques en tuyère convergente-divergente*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France.
- Taitel. 1980. VTD **Completer**. *AIChE Journal*, **26**(3), 345–454.
- Taitel, Y., & Dukler, A. E. 1976. A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near-horizontal gas-liquid flow. *AIChE J.*, **22**, 47.
- Wallis, G. B. 1969. *One dimensional two-phase flow*. McGraw-Hill.
- Whitham, G.B. 1974. *Linear and nonlinear waves*. Wiley.
- Zwick, S. A., & Plesset, M. S. 1954. On the dynamics of small vapor bubbles in liquid. *J. Math. Phys.*, **33**, 308–330.