

Đề thi thử số 2

Ngày 10 tháng 12 năm 2011

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I (2,0 điểm) Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1),

2. Với giá trị nào của m thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số (1) tiếp xúc với đường tròn $(C) : (x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$.

Câu II (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x \right) = 1 + \cos (\pi \sin 2x)$,

2. Giải phương trình: $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$.

Câu III (1,0 điểm) Tính tích phân

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Câu IV (1,0 điểm)

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ với tâm O . Gọi p, q, u, v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$. Chứng minh rằng nếu mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) thì

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2}$$

Câu V (1,0 điểm) Cho $x, y, z \in [1; 3]$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \leq \frac{26}{3}$$

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A , phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, hai điểm A và B thuộc trục hoành. Biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2, tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC .

2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $M(3; 1; 0), N(-9; 4; 9)$. Tìm điểm I trên mặt phẳng (α) sao cho $|IM - IN|$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu VII.a

Xác định tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $|z - i| + |z + i| = 4$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + (y + 1)^2 = 4$ và $(C_2) : (x - 1)^2 + y^2 = 2$. Viết phương trình đường thẳng Δ biết Δ tiếp xúc với (C_1) và cắt (C_2) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2$.

2. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, hãy viết phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng $d : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = -2 + 2t' \\ y = 2t' \\ z = 2 + 4t' \end{cases}$.

Câu VII.b (1,0 điểm) Cho tập $A = \{0, 1, 2, 5, 7, 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 6 có 5 chữ số được chọn từ tập A .

Đáp án đề thi thử số 2

Ngày 29 tháng 12 năm 2011

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$ (1)

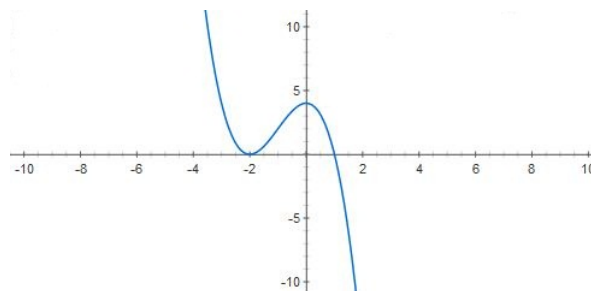
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).

Lời giải :

- Tập xác định : \mathbb{R}
- Sự biến thiên :
 - Chiều biến thiên :
 - * $y' = -3x^2 - 6x$
 - * Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$.
 - * Hàm số đồng biến trên $(-2; 0)$.
 - Cực trị : $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $(-2; 0)$ và đạt cực đại tại $(0; 4)$.
 - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \mp\infty$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
 - Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		-	+	-
y	$+\infty$		4	$-\infty$

- Đồ thị hàm số :



□

2. Với giá trị nào của m thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số (1) tiếp xúc với đường tròn $(C) : (x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$.

Lời giải :

- Hai cực trị của hàm số là $A(-2 : 0), B(0; 4)$ nên đường thẳng (D) đi qua hai cực trị là: $2x - y + 4 = 0$
- Tâm và bán kính đường tròn (C) : $I(m; m + 1), R = \sqrt{5}$
- Để đường thẳng (D) tiếp xúc với (C) thì ta phải có: $d(I, D) = R$

$$\begin{aligned} \frac{|2m - m - 1 + 4|}{\sqrt{5}} &= \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow |m + 3| &= 5 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Câu II.1 (1 điểm) Giải phương trình: $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos(\pi \sin 2x)$

Lời giải : Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) - 1 &= \cos(\pi \sin 2x) \\ \Leftrightarrow \cos(\pi \cos^2 x) &= \cos(\pi \sin 2x) \\ \Leftrightarrow \cos^2 x &= \pm \sin 2x + 2k, \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x - 2\sin 2x = 4k - 1 \\ \cos 2x + 2\sin 2x = 4k - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 &\geq 16k^2 - 8k + 1 \\ \Leftrightarrow 4k^2 - 2k - 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{4} &\leq k \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$. Do đó ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cos 2x - 2 \sin 2x = -1 \\ \cos 2x + 2 \sin 2x = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2\cos^2 x - 4 \sin x \cos x = 0 \\ 2\cos^2 x + 4 \sin x \cos x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x \pm 2 \sin x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x = \pm \arctg\left(\frac{1}{2}\right) + m\pi \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có các họ nghiệm là $x = \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, \pm \arctg\left(\frac{1}{2}\right) + m\pi \right\}, (m, n \in \mathbb{Z})$ □

Câu II.2 (1 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

Lời giải : Điều kiện : $x \in [-2; 2]$ (★)

Vì $12x - 8 = 2[2x + 4 - 4(2 - x)] = 2[(\sqrt{2x+4})^2 - (2\sqrt{2-x})^2]$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x}\right) \left(2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} - \sqrt{9x^2+16}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = 0 & (1) \\ 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} - \sqrt{9x^2+16} = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow 2x + 4 = 8 - 4x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$, thỏa mãn (★).

Lại có :

$$\begin{aligned} (2) & \Leftrightarrow 48 - 8x + 16\sqrt{8-2x^2} = 9x^2 + 16 \\ & \Leftrightarrow 4(8 - 2x^2) + 16\sqrt{8-2x^2} - x^2 - 8x = 0 \end{aligned}$$

Đặt $t = 2\sqrt{8-2x^2}, t \geq 0$, ta được:

$$t^2 + 8t - x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = -x - 8 \end{cases}$$

$$\bullet \quad t = x \Leftrightarrow 2\sqrt{8-2x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 32 - 8x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$\bullet \quad t = -x - 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{8-2x^2} + x + 8 = 0, \text{ phương trình này vô nghiệm do } (\star).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3} \right\}$ □

Câu III (1 điểm) Tính tích phân

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Lời giải : Đặt $x = \pi - t$, khi đó

- $dx = -dt$; $\sin x = \sin t$; $\cos^2 x = \cos^2 t$.
- $x = 0 \Rightarrow t = \pi$; $x = \pi \Rightarrow t = 0$.

Ta có:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I$$

Do đó:

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

Đặt: $\tan u = \cos t$, $u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có :

- $\frac{du}{\cos^2 u} = -\sin t dt$
- $t = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$; $t = \pi \Rightarrow u = -\frac{\pi}{4}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{(1 + \tan^2 u) \cos^2 u} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} du \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

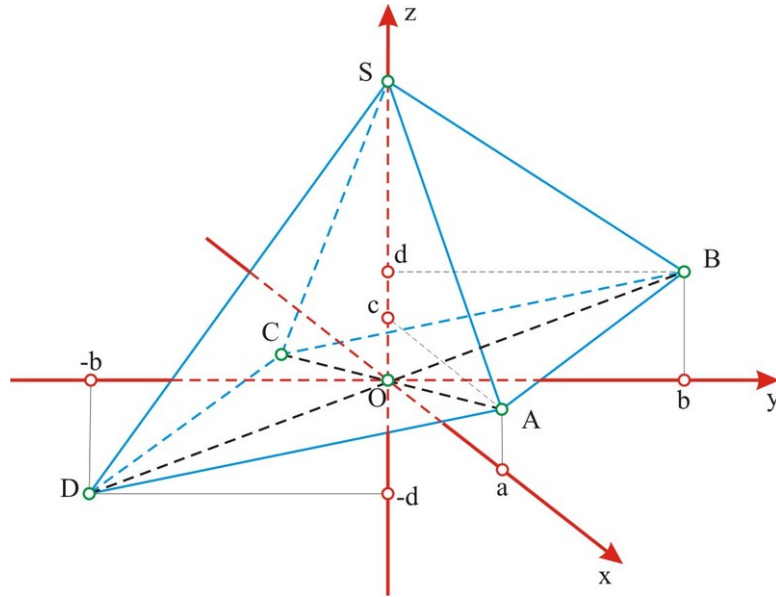
□

Câu IV (1 điểm)

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ với tâm O . Gọi p, q, u, v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$. Chứng minh rằng nếu mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) thì

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2}.$$

Lời giải :



Mặt phẳng qua O vuông góc với SO cắt (SAC) và (SBD) theo các giao tuyến $x'Ox$ và $y'Oy$. Khi $(SAC) \perp (SBD)$ thì $x'Ox \perp y'Oy$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho tia Oz trùng với tia OS . Lúc đó $S(0; 0; h)$, $A(a; 0; c)$, $B(0; b; d)$. C và D đối xứng của A và B qua O nên $C(-a; 0; -c)$, $D(0; -b; -d)$.

Ta có $\vec{SA} = (a; 0; c - h)$, $\vec{SB} = (0; b; d - h)$, mp $(SAB) : b(c - h)x + a(d - h)y - ab(z - h) = 0$.

Khoảng cách từ O đến (SAB)

$$p = \frac{|abh|}{\sqrt{b^2(c - h)^2 + a^2(d - h)^2 + a^2b^2}} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{b^2(c - h)^2 + a^2(d - h)^2 + a^2b^2}{a^2b^2h^2}$$

Cũng có

$$\frac{1}{u^2} = \frac{b^2(c + h)^2 + a^2(d + h)^2 + a^2b^2}{a^2b^2h^2}$$

Do đó

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = 2 \frac{(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2d^2) + h^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2h^2}$$

Tương tự

$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2} = 2 \frac{(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2d^2) + h^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2h^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

□

Câu V(1 điểm) Cho $x, y, z \in [1; 3]$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \leq \frac{26}{3}$$

Lời giải : Không giảm tính tổng quát giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \leq 3$

Vậy $\frac{y}{z}; \frac{x}{y} \leq 1$

Do đó :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 - \frac{y}{z}\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{z} - \frac{y}{z} - \frac{x}{y} &\geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{y}{x}\right) \left(1 - \frac{z}{y}\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{z}{x} - \frac{z}{y} - \frac{y}{x} &\geq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \leq 2 + 2 \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

Đặt $\frac{z}{x} = t$ thế thì $1 \leq t \leq 3$ Khảo sát hàm $f(t) = t + \frac{1}{t}$ ta dễ dàng thấy $f(t)$ tăng trên khoảng $[1; 3]$. Suy ra $\max f(t) = f(3) = \frac{10}{3}$

Vậy

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \leq 2 + 2 \frac{10}{3} = \frac{26}{3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x, y, z) = (1, 1, 3)$ và các hoán vị. □

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A , phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, hai điểm A và B thuộc trục hoành. Biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2, tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải : Ta có $B = BC \cap Ox \Rightarrow B(1; 0)$. Gọi $A(a; 0)$, ($a \neq 1$).

$$AC \perp AB \Rightarrow AC \perp Ox \Rightarrow C(a; \sqrt{3}a - \sqrt{3}) \quad (\text{do } C \in BC)$$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_G = \frac{2a+1}{3} \\ y_G = \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3} \end{cases}$

Ta có: $AB = |a-1|, AC = \sqrt{3}|a-1|, BC = 2|a-1|$

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2 = pr = AB + BC + CA = (\sqrt{3} + 3)|a-1|$$

Suy ra:

$$|a-1| = 2(\sqrt{3}+1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{3}+3 \\ a = -2\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{4\sqrt{3}+7}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

hoặc

$$G\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$$

□

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $M(3; 1; 0), N(-9; 4; 9)$. Tìm điểm I trên mặt phẳng (α) sao cho $|IM - IN|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải : Ta có $T = 6(-12) < 0$ nên M, N nằm về hai phía của mp (α) .

Gọi R là điểm đối xứng của M qua mp (α) , khi đó đường thẳng MR qua $M(3; 1; 0)$ vuông góc với mp (α) có phương trình:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

Gọi $H = MR \cap \text{mp}(\alpha) \Rightarrow H(3+2t; 1-t; t) \in MR$.

Vì $H \in \text{mp}(\alpha)$ nên $H(1; 2; -1) \Rightarrow R(-1; 3; -2)$

Ta có: $|IM - IN| = |IR - IN| \leq RN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I, N, R thẳng hàng.

Lại có: $\overrightarrow{RN} = (-8; 1; 11)$ do đó RN có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 - 8t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 11t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Điểm I cần tìm là giao điểm của RN với mp (α) . Do đó $I(-1-8t; 3+t; -2+11t)$ thuộc mp (α) .

Kết luận : $I(7; 2; -13)$.

□

Câu VII.a (1 điểm) Xác định tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - i| + |z + i| = 4$.

Lời giải : Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) suy ra $M(x; y)$ biểu diễn số phức z . Khi đó

$$\begin{aligned} &|z - i| + |z + i| = 4 \\ \Leftrightarrow &|x + (y - 1)i| + |x + (y + 1)i| = 4 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4 \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $F_1(0; -1)$, $F_2(0; 1)$ thì $(*) \Leftrightarrow MF_2 + MF_1 = 4 > F_1F_2 = 2$.

Suy ra tập hợp điểm M là elip (E) có hai tiêu điểm là F_1F_2 .

Ta viết phương trình elip (E) :

Lưu ý ở đây tiêu điểm nằm trên trục tung. Do đó phương trình chính tắc của (E) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0; a^2 = b^2 - c^2)$$

Ta có:

$$\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2b = 4 \\ F_1F_2 = 2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 - c^2 = 3$$

Vậy tập hợp điểm M là elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

□

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + (y + 1)^2 = 4$ và $(C_2) : (x - 1)^2 + y^2 = 2$. Viết phương trình đường thẳng Δ biết Δ tiếp xúc với (C_1) và cắt (C_2) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2$.

Lời giải : Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0; -1)$, bán kính $R_1 = 2$, (C_2) có tâm $I_2(1; 0)$, bán kính $R_2 = \sqrt{2}$.

Xét đường thẳng $\Delta \perp Ox$, khi đó phương trình của Δ có dạng $x = m$.

Suy ra:

$$\begin{cases} d(I_1, \Delta) = 2 \\ d(I_2, \Delta) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = 2 \\ |1 - m| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \Leftrightarrow \Delta : x = 2$$

Xét đường thẳng Δ không vuông góc với Ox , phương trình của Δ có dạng $kx - y + a = 0$.

Tương tự, ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{|1+a|}{\sqrt{k^2+1}} = 2 \\ \frac{|k+a|}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |1+a| = 2\sqrt{k^2+1} \quad (*) \\ |k+a| = \sqrt{k^2+1} \end{cases} \Rightarrow |1+a| = 2|k+a| \Rightarrow \begin{cases} a = 1-2k \\ a = -\frac{2k+1}{3} \end{cases}$$

Với $a = 1 - 2k$, thay vào $(*)$: $(2 - 2k)^2 = 4(k^2 + 1) \Leftrightarrow k = 0$. Do đó $a = 1$. Suy ra $\Delta: y = 1$.

Với $a = -\frac{2k+1}{3}$, thay vào $(*)$: $\left(1 - \frac{2k+1}{3}\right)^2 = 4(k^2 + 1) \Leftrightarrow (1-k)^2 = 9(k^2 + 1)$ (vô nghiệm).

Vậy $\Delta: x = 2$ hoặc $\Delta: y = 1$. □

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hãy viết phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = -2 + 2t' \\ y = 2t' \\ z = 2 + 4t' \end{cases}$.

Lời giải : Dễ thấy $\vec{u} = (1; 2; 0)$, $\vec{v} = (1; 1; 2)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và d' . Giả sử đường thẳng vuông góc chung cắt d và d' lần lượt tại M và N . Khi đó:

$$M(3+t; -1+2t; 4), N(-2+2t'; 2t'; 2+4t').$$

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{n} \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t' - 5t = 3 \\ 12t' - 3t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{31}{42} \\ t = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Vậy đường thẳng cần tìm đi qua $M\left(\frac{23}{7}; -\frac{3}{7}; 4\right)$ có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (4; -2; -1)$

$$\text{nên có phương trình: } \begin{cases} x = \frac{23}{7} + 4t \\ y = -\frac{3}{7} - 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad \square$$

Câu VII.b (1 điểm) Cho tập $A = \{0, 1, 2, 5, 7, 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 6 có 5 chữ số được chọn từ tập A .

Lời giải : Chia tập A thành 3 tập: $A_0 = \{0\}$; $A_1 = \{1, 7\}$; $A_2 = \{2, 5, 8\}$ tương ứng các phần tử chia 3 dư 0, 1, 2.

Gọi $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ là một số thỏa mãn yêu cầu đề bài, $x : 6 \Leftrightarrow (x : 2) \& (x : 3)$.

Như vậy $a_1 \neq 0$ có 5 cách chọn, còn $a_5 \in \{0, 2, 8\}$ có 3 cách chọn, trong đó:

- $\overline{a_1a_5} \in \{12, 18, 72, 78\}$ thì phải chọn $\overline{a_2a_3a_4}$ sao cho $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 0 \pmod{3}$
- $\overline{a_1a_5} \in \{20, 50, 80\}$ thì phải chọn $\overline{a_2a_3a_4}$ sao cho $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 1 \pmod{3}$
- $\overline{a_1a_5} \in \{10, 22, 28, 52, 58, 70, 82, 88\}$ thì phải chọn $\overline{a_2a_3a_4}$ sao cho $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 2 \pmod{3}$

1. Tính các số $\overline{a_2a_3a_4}$ mà $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 0 \pmod{3}$

$$\begin{array}{lcl} & \nearrow & (a_3 \in A_0) \& (a_4 \in A_0) \rightarrow 1.1.1 = 1 \text{ số} \\ \bullet \quad a_2 \in A_0 & \rightarrow & (a_3 \in A_1) \& (a_4 \in A_2) \rightarrow 1.2.3 = 6 \text{ số} \\ (1 \text{ cách}) & \searrow & (a_3 \in A_2) \& (a_4 \in A_1) \rightarrow 1.3.2 = 6 \text{ số} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & \nearrow & (a_3 \in A_0) \& (a_4 \in A_2) \rightarrow 2.1.3 = 6 \text{ số} \\ \bullet \quad a_2 \in A_1 & \rightarrow & (a_3 \in A_2) \& (a_4 \in A_0) \rightarrow 2.3.1 = 6 \text{ số} \\ (2 \text{ cách}) & \searrow & (a_3 \in A_1) \& (a_4 \in A_1) \rightarrow 2.2.2 = 8 \text{ số} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & \nearrow & (a_3 \in A_0) \& (a_4 \in A_1) \rightarrow 3.1.2 = 6 \text{ số} \\ \bullet \quad a_2 \in A_2 & \rightarrow & (a_3 \in A_1) \& (a_4 \in A_0) \rightarrow 3.2.1 = 6 \text{ số} \\ (3 \text{ cách}) & \searrow & (a_3 \in A_2) \& (a_4 \in A_2) \rightarrow 3.3.3 = 27 \text{ số} \end{array}$$

Tổng cộng có $1 + 6 + 6 + 6 + 6 + 8 + 6 + 6 + 27 = 72$ số

2. Tính các số $\overline{a_2a_3a_4}$ mà $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 1 \pmod{3}$

$$\begin{array}{lcl} & \nearrow & (a_3 \in A_0) \& (a_4 \in A_1) \rightarrow 1.1.2 = 2 \text{ số} \\ \bullet \quad a_2 \in A_0 & \rightarrow & (a_3 \in A_1) \& (a_4 \in A_0) \rightarrow 1.2.1 = 2 \text{ số} \\ (1 \text{ cách}) & \searrow & (a_3 \in A_2) \& (a_4 \in A_2) \rightarrow 1.3.3 = 9 \text{ số} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & \nearrow & (a_3 \in A_0) \& (a_4 \in A_0) \rightarrow 2.1.1 = 2 \text{ số} \\ \bullet \quad a_2 \in A_1 & \rightarrow & (a_3 \in A_1) \& (a_4 \in A_2) \rightarrow 2.2.3 = 12 \text{ số} \\ (2 \text{ cách}) & \searrow & (a_3 \in A_2) \& (a_4 \in A_1) \rightarrow 2.3.2 = 12 \text{ số} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & \nearrow & (a_3 \in A_0) \& (a_4 \in A_2) \rightarrow 3.1.3 = 9 \text{ số} \\ \bullet \quad a_2 \in A_2 & \rightarrow & (a_3 \in A_1) \& (a_4 \in A_1) \rightarrow 3.2.2 = 12 \text{ số} \\ (3 \text{ cách}) & \searrow & (a_3 \in A_2) \& (a_4 \in A_0) \rightarrow 3.3.1 = 9 \text{ số} \end{array}$$

Tổng cộng có $2 + 2 + 9 + 2 + 12 + 12 + 9 + 12 + 9 = 69$ số

3. Tính các số $\overline{a_2a_3a_4}$ mà $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 2 \pmod{3}$

$$\begin{array}{lcl} & \nearrow & (a_3 \in A_0) \& (a_4 \in A_2) \rightarrow 1.1.3 = 3 \text{ số} \\ \bullet \quad a_2 \in A_0 & \rightarrow & (a_3 \in A_1) \& (a_4 \in A_1) \rightarrow 1.2.2 = 4 \text{ số} \\ (1 \text{ cách}) & \searrow & (a_3 \in A_2) \& (a_4 \in A_0) \rightarrow 1.3.1 = 3 \text{ số} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & \nearrow & (a_3 \in A_0) \& (a_4 \in A_1) \rightarrow 2.1.2 = 4 \text{ số} \\ \bullet \quad a_2 \in A_1 & \rightarrow & (a_3 \in A_1) \& (a_4 \in A_0) \rightarrow 2.2.1 = 4 \text{ số} \\ (2 \text{ cách}) & \searrow & (a_3 \in A_2) \& (a_4 \in A_2) \rightarrow 2.3.3 = 18 \text{ số} \end{array}$$

- $$\begin{array}{ll}
 \nearrow & (a_3 \in A_0) \& (a_4 \in A_0) \rightarrow 3.1.1 = 3 \text{ số} \\
 \bullet \quad a_2 \in A_2 & \rightarrow (a_3 \in A_1) \& (a_4 \in A_2) \rightarrow 3.2.3 = 18 \text{ số} \\
 (3 \text{ cách}) & \searrow (a_3 \in A_2) \& (a_4 \in A_1) \rightarrow 3.3.2 = 18 \text{ số}
 \end{array}$$

Tổng cộng có $3 + 4 + 3 + 4 + 4 + 18 + 3 + 18 + 18 = 75$ số

Kết luận : số các số tự nhiên chia hết cho 6 có 5 chữ số hình thành từ $A = \{0, 1, 2, 5, 7, 8\}$ là S

$$S = 4.72 + 3.69 + 8.75 = 1095 \text{ số.}$$

□